MINIMALE TOPOLOGISCHE GRUPPEN

Ulrich Schwanengel

1979

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546803_0039

MINIMALE TOPOLOGISCHE GRUPPEN

D I S S E R T A T I O N

Zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Naturwissenschaften
des Fachbereichs Mathematik
der Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von Ulrich Schwanengel
aus Heidenheim/Brenz

eingereicht im Juli 1978

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

1. Referent: Professor Dr. Walter Roelcke
Korreferent: Professor Dr. Hans Werner Schuster

Tag der mündlichen Prüfung: 1. Juni 1979

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

§ 1 Vorbemerkungen 5

§ 2 Lokalkompakte nicht-kompakte minimale Gruppen 17

§ 3 Zur Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ 24

§ 4 Allgemeine lineare Gruppen und eine Vergröberungsmethode 36

§ 5 Dichte Untergruppen von $({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}} \underset{\eta}{\times} \mathrm{Aut}({}^{\mathbb{Z}}/_{n\mathbb{Z}}))^I$ 50

§ 6 Drei-Raum-Probleme und Produkte 63

§ 7 Spezielle semi-direkte Produkte 75

§ 8 Abzählbare direkte Produkte q-minimaler Gruppen 84

Liste der Symbole 92

Stichwortverzeichnis 94

Offene Fragen 95

Literaturverzeichnis 96

Einleitung

Untersuchungen der Minimalität von Topologien haben unter anderem deren Klassifizierung zum Ziel. In der Literatur finden sich solche Themen seit vierzig Jahren (vgl. [3]), speziell im Rahmen der Theorie topologischer Gruppen werden sie jedoch erst seit 1970 näher untersucht. Ihre Behandlung ist noch keineswegs abgeschlossen; es zeichnet sich eine verhältnismäßig reichhaltige Theorie ab.

Eine separierte topologische Gruppe $(X,\mathcal{T})$ heißt minimal, wenn es auf X keine separierte Gruppentopologie gibt, die echt gröber als $\mathcal{T}$ ist (d.h., wenn $\mathcal{T}$ ein minimales Element der durch die Inklusion halbgeordneten Menge aller separierten Gruppentopologien auf X ist). Sie heißt q-minimal, wenn für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von $(X,\mathcal{T})$ der Quotient $(X/N, \mathcal{T}/N)$ minimal ist.

Jede kompakte Gruppe ist q-minimal. Die Existenz nicht-kompakter minimaler Gruppen wurde gleichzeitig und unabhängig voneinander von D. Doitchinov [8] und R.M. Stephenson, Jr., [25] in den Jahren 1971/72 nachgewiesen. Sie zeigten beide, daß $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, versehen mit der Standardtopologie, minimal ist. Außerdem bewies D. Doitchinov, daß $\mathbb{Z}$, versehen mit der p-adischen Topologie bezüglich einer Primzahl p, minimal ist. Alle diese Gruppen sind sogar q-minimal (wegen $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ s. § 1, 1.15 und [27]).

Der Ausbau einer allgemeinen Theorie präkompakter minimaler abelscher Gruppen wird von I. Prodanov verfolgt (s. [7], [19], [20], [21], [22]). Die einzige bisher bekannte nicht-präkompakte minimale (sogar q-minimale) Gruppe ist in [6] konstruiert worden. Diese Gruppe besitzt nicht einmal eine Gruppenvervollständigung, ist also insbesondere weder eine SIN-Gruppe noch lokalkompakt. R.M. Stephenson, Jr., hat in [25] festgestellt, daß lokalkompakte minimale abelsche Gruppen kompakt sind. Die Existenz lokalkompakter nicht-kompakter minimaler Gruppen ist dabei offengeblieben.

Bekannte Permanenzeigenschaften der Minimalität sind: Besitzt eine separierte topologische Gruppe eine dichte minimale Untergruppe, so ist sie minimal (B. Banaschewski [2]). Minimalität und q-Minimalität vererben sich bei abelschen Gruppen auf abgeschlossene Untergruppen (I. Prodanov [21]). Das direkte Produkt einer minimalen und einer kompakten Gruppe ist minimal (D. Doitchinov [8]). Endliche direkte Produkte minimaler Torsionsgruppen sind minimal (R.M. Stephenson, Jr., [26]).

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich im wesentlichen damit,
- die Existenz lokalkompakter nicht-kompakter minimaler Gruppen nachzuweisen,
- die Beschreibung der Minimalitätseigenschaften von Standardgruppen fortzuführen,
- neue und weitergehende Permanenzeigenschaften minimaler und q-minimaler Gruppen aufzuzeigen und durch Gegenbeispiele abzugrenzen.

In § 1 werden die benötigten Hilfsmittel aus der Literatur bereitgestellt. Durch Vergleich verschiedener Resultate ergeben sich dabei auch einige neue Aussagen (Stichworte: Charakterisierung minimaler Gruppen in bezug auf Präkompaktheit; dichte Untergruppen q-minimaler Gruppen; dichte Untergruppen nicht-abelscher B_r- bzw. B-vollständiger Gruppen).

Im zweiten Paragraphen beweisen wir, daß die abgeschlossene Untergruppe

$$\left\{\begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| y>0,\ x\in\mathbb{R}\right\}$$

von $GL(2,\mathbb{R})$, versehen mit der Standardtopologie, minimal ist. Um noch ein weiteres Beispiel einer lokalkompakten nicht-kompakten minimalen Gruppe zu gewinnen, erklären wir für jede separierte topologische Gruppe K und jede diskrete Gruppe H in kanonischer Weise ein topologisches semi-direktes Produkt $X = K^H \underset{G}{\times} H$. Von diesem zeigen wir, daß es minimal ist, wenn K kompakt und nicht-trivial ist. Offenbar ist dann

X selbst nicht kompakt, wenn H unendlich ist.

Unter Verwendung verschiedener Resultate von I. Prodanov geben wir im dritten Paragraphen eine negative Antwort auf die von D. Doitchinov [9] gestellte Frage, ob es auf $\mathbb{R}$ eine minimale Gruppentopologie gibt, die gröber als die Standardtopologie ist. Im Anschluß daran gehen wir auf die von N. Bourbaki in [5], Ch. V, § 1, exercise 2, fälschlicherweise aufgestellte Behauptung ein, daß auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ jede separierte Gruppentopologie, die echt gröber als die diskrete Topologie bzw. Standardtopologie ist, präkompakt sei. Ausgehend von einer Konstruktionsidee von W. Roelcke weisen wir nach, daß es sogar mindestens abzählbar unendlich viele separierte nicht-präkompakte Gruppentopologien auf $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{R}$ gibt, die echt gröber als die diskrete Topologie bzw. Standardtopologie sind.

In § 4 zeigen wir, daß sich Minimalität und q-Minimalität auf das Zentrum einer Gruppe vererben. Daraus erhalten wir dann, daß die standardmäßig topologisierten Gruppen $GL(n,K)$ für $K = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und entsprechende allgemeinere Gruppen nicht minimal sind. Danach führen wir eine Verallgemeinerung der beim Beweis der Zentrums-Aussage verwendeten Vergröberungsmethode an und stellen die von R.M. Stephenson, Jr., in [25] angegebene Methode als deren Spezialfall dar.

Die Vererbbarkeit auf das Zentrum selbst grenzen wir in § 5 scharf ab: Wir geben ein Beispiel einer q-minimalen metrisierbaren metabelschen SIN-Gruppe, die einen abgeschlossenen nicht-minimalen Normalteiler besitzt.

Der erste Teil von § 6 beschäftigt sich mit positiven Aussagen bei Drei-Raum-Problemen und ist in Zusammenarbeit mit S. Dierolf und V. Eberhardt entstanden. Das Hauptergebnis ist unser Satz 6.7, der die aus der Literatur bekannten Produktsätze weitreichend verallgemeinert. Aus ihm folgt unter anderem, daß sich auch q-Minimalität bei Torsionsgruppen auf endliche direkte Produkte vererbt. Zur Abgrenzung dieses Satzes und

seiner Folgerungen konstruieren wir im zweiten Teil von § 6 ein nicht-minimales separiertes topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ einer q-minimalen Torsionsgruppe G und einer endlichen diskreten Gruppe H.

In § 7 untersuchen wir die Vererbbarkeit der Minimalität und q-Minimalität auf spezielle topologische semi-direkte Produkte und erhalten unter anderem den Satz: Die Minimalität der Gruppen G und H überträgt sich auf ihr topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ bezüglich eines Homomorphismus σ, wenn G abelsch und σ injektiv ist.

Mit Hilfe zweier Ergebnisse von V. Eberhardt aus [10] und [11] stellen wir im achten Paragraphen schließlich noch in verschiedenen Fällen die Vererbbarkeit der q-Minimalität auf abzählbare direkte Produkte fest. Dabei ergibt sich eine positive Antwort auf die von R.M. Stephenson, Jr., in [26] gestellte Frage, ob $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ q-minimal ist.

Eine Liste der verwendeten Symbole, ein kurzes Stichwortverzeichnis sowie eine Sammlung von offenen Fragen, die im Verlauf der Arbeit aufgeworfen wurden, findet man im Anhang.

Bei den in der Arbeit benötigten allgemeinen Ergebnissen über topologische Gruppen beziehen wir uns zum Teil auf die von W. Roelcke in den Jahren 1974 und 1975 an der Universität München gehaltenen Vorlesungen "Topologische Gruppen I und II" [23]. Dies betrifft insbesondere Resultate über topologische semi-direkte Produkte.

Herrn Professor Dr. W. Roelcke, Frau Dr. S. Dierolf und Herrn Dr. V. Eberhardt danke ich herzlich für ihr stetes Interesse am Fortschritt der Arbeit und für zahlreiche Hinweise und anregende Gespräche. Meinen Dank möchte ich auch Herrn Professor Dr. J. Elstrodt für die Anregung zu dieser Arbeit und für erste Hinweise aussprechen.

§ 1 Vorbemerkungen

In diesem Paragraphen stellen wir verschiedene, zum Teil aus der Literatur bekannte Aussagen bereit. Besonders interessieren uns dabei Ergebnisse über präkompakte minimale Gruppen und dichte Untergruppen minimaler Gruppen, die wir, soweit möglich, in erweiterter Form darstellen. Der wichtigste Punkt betrifft die Wechselwirkung eines Kriteriums von Banaschewski [2] und zweier Sätze von Sulley [27].

Wir verstehen unter einer separierten (bzw. präkompakten u.s.w.) Gruppe stets eine topologische Gruppe, die separiert (bzw. präkompakt u.s.w.) ist. Ein lokalkompakter oder kompakter Raum soll immer separiert sein, während wir dies bei präkompakten Räumen nicht voraussetzen.

1.1 Definition. Eine separierte Gruppe $(X,\mathcal{T})$ bzw. ihre Gruppentopologie $\mathcal{T}$ heißen minimal, wenn es auf X keine separierte Gruppentopologie gibt, die echt gröber als $\mathcal{T}$ ist. Sie heißen q-minimal, wenn für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von $(X,\mathcal{T})$ der Quotient $({}^{X}/_{N}, {}^{\mathcal{T}}/_{N})$ minimal ist.

Von Prodanov [21] stammt der wichtige Satz, daß jede q-minimale abelsche Gruppe präkompakt ist. Diesen wollen wir mit Hilfe der beiden folgenden Lemmata etwas allgemeiner formulieren. Dabei fassen wir das zweite Lemma für spätere Zwecke gleich weiter als wir es hier benötigen.

1.2 Lemma (W. Roelcke, vgl. auch [21]). Sei X eine topologische Gruppe und sei G ein Normalteiler von X derart, daß G und ${}^{X}/_{G}$ präkompakte Gruppen sind. Dann ist auch X präkompakte Gruppe.

Beweis. Sei U aus $\mathfrak{U}_e(X)$. Da X/G präkompakt ist, gibt es eine endliche Teilmenge E von X mit X = UEG. Mit G ist auch EG präkompakte Teilmenge von X. Also gibt es eine endliche Teilmenge F von X mit EG ⊂ UF. Es folgt $X = U^2F$. ./.

1.3 Lemma. Sei $(X,\mathcal{T})$ eine separierte Gruppe. Dann sind äquivalent:

(a) $(X,\mathcal{T})$ ist q-minimal.

(b) Für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von $(X,\mathcal{T})$ ist der Quotient $(X/N, \mathcal{T}/N)$ q-minimal.

(c) Jedes stetige separierte homomorphe Bild von $(X,\mathcal{T})$ ist q-minimal.

(d) Für jede Gruppentopologie τ auf X mit $\tau \subset \mathcal{T}$ gilt
$$\tau/\overline{\{e\}}^{\tau} = \mathcal{T}/\overline{\{e\}}^{\tau} .$$

(e) Für jede Gruppentopologie τ auf X mit $\tau \subset \mathcal{T}$ ist τ die Initialtopologie bezüglich der kanonischen Abbildung
$$q_N: X \longrightarrow (X/N, \mathcal{T}/N),$$
wobei $N = \overline{\{e\}}^{\tau}$ ist.

Der Beweis ist unmittelbar klar. ./.

Für eine topologische Gruppe X bezeichnen wir mit (i_X, X_c) die Bohr-Kompaktifizierung von X im Sinne von Holm [16], p.34. Hierbei sind X_c eine kompakte Gruppe und $i_X: X \to X_c$ ein stetiger Homomorphismus so, daß gilt: für jeden stetigen Homomorphismus f von X in eine kompakte Gruppe Z gibt es genau einen stetigen Homomorphismus $f_c: X_c \longrightarrow Z$ mit $f = f_c \circ i_X$.

1.4 Behauptung. Sei X eine q-minimale Gruppe. Eine der beiden folgenden Bedingungen seien erfüllt.

(a) Die Kommutatorgruppe D(X) von X ist eine präkompakte Untergruppe von X.

(b) Der Kern von i_X ist eine präkompakte Untergruppe von X.

Dann ist X präkompakt.

Beweis. Der Quotient $X/\overline{D(X)}$ ist q-minimal und abelsch, also präkompakt nach Prodanov [21]; der Quotient $X/\mathrm{Kern}(i_X)$ ist topologisch isomorph zur präkompakten Untergruppe $i_X(X)$ von X_c, da X q-minimal ist. In beiden Fällen liefert nun 1.2 die

Behauptung. ./.

1.5 Bemerkung. Ist X eine topologische Gruppe, so ist ein Element x aus X genau dann aus dem Kern von i_X, wenn es für jeden stetigen Homomorphismus $f:X \longrightarrow Z$ von X in eine kompakte Gruppe Z zum Kern von f gehört. Nach [15], Theorem (23.8), gilt für lokalkompaktes X

$$\text{Kern}(i_X) \subset D(X),$$

so daß 1.4 (a) in diesem Fall aus 1.4 (b) folgt.
Im allgemeinen gilt für eine separierte Gruppe X weder Kern $i_X \subset D(X)$, wie die Existenz separierter abelscher Gruppen mit nicht-trennendem stetigen Dual zeigt, noch $D(X) \subset \text{Kern}(i_X)$, was schon jede endliche nicht-abelsche Gruppe belegt.

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Präkompaktheit einer minimalen Gruppe beschreibt

1.6 Satz. Sei $(X,\mathcal{T})$ eine minimale Gruppe. Dann sind äquivalent:
(a) Die topologische Gruppe $(X,\mathcal{T})$ ist präkompakt.
(b) Für jedes x aus $X\setminus\{e\}$ existiert ein stetiger Homomorphismus $f_x: (X,\mathcal{T}) \longrightarrow K_x$ von $(X,\mathcal{T})$ in eine kompakte Gruppe K_x mit $f_x(x) \neq e$.

Beweis. Da separierte präkompakte Gruppen kompakte Gruppenvervollständigungen besitzen, ist (a) $\Rightarrow$ (b) klar.
(b) $\Rightarrow$ (a): Die Initialtopologie $\mathcal{T}'$ auf X bezüglich der Abbildungen $f_x: X \longrightarrow K_x$ (x aus $X\setminus\{e\}$) ist eine separierte präkompakte Gruppentopologie auf X, die gröber als $\mathcal{T}$ ist. Da $\mathcal{T}$ minimal ist, erhält man $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ und damit die Präkompaktheit von $(X,\mathcal{T})$. ./.

1.7 Folgerungen/Bemerkungen.
(a) Eine minimale abelsche Gruppe X ist genau dann präkompakt, wenn die stetigen Charaktere auf X die Punkte von X trennen (vgl. [19], Abschnitt 4). Insbesondere sind lokalkompakte minimale abelsche Gruppen kompakt (Stephenson [25]).

(b) Im nicht-abelschen Fall hat man Charaktere durch fast-periodische Funktionen (Definition im Sinne von [15], (18.2)) zu ersetzen: Eine minimale Gruppe X ist genau dann präkompakt, wenn die stetigen fast-periodischen Funktionen auf X die Punkte von X trennen (denn genau dann ist i_X injektiv - vgl. [1], p.134). Insbesondere sind minimale, vollständige Gruppen mit genügend vielen stetigen fast-periodischen Funktionen kompakt, was eine neue Charakterisierung kompakter Gruppen aufdeckt.

Ergänzend zu den Folgerungen (a) und (b) die Bemerkungen (c) und (d):

(c) (I. Prodanov [20] und [19], Abschnitt 4). Die präkompakten minimalen Gruppentopologien auf einer abelschen Gruppe X sind die Initialtopologien auf X bezüglich derjenigen Untergruppen H der Charaktergruppe Y von X, die die Punkte von X trennen, aber keine echte Untergruppe besitzen, die auch noch die Punkte von X trennt (H ist "minimal trennend"). Trägt Y die (Gruppen-)Topologie der kompakten Konvergenz bzgl. der diskreten Topologie auf X, so ist ein solches H auch dadurch charakterisiert, daß es eine dichte Untergruppe von Y ist, aber keine echte Untergruppe besitzt, die auch noch in Y dicht ist (H ist "minimal dicht").

(d) Versieht man die Algebra A der fast-periodischen Funktionen auf einer beliebigen Gruppe X mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz und nennt man eine abgeschlossene Unteralgebra B von A minimal trennend, wenn B die Punkte von X trennt, aber keine abgeschlossene echte Unteralgebra von B dies tut, so kann man - in Anlehnung an das in (c) erwähnte Resultat von Prodanov für abelsches X - eine Bijektion von der Menge der präkompakten minimalen Gruppentopologien auf X auf die Menge der minimal trennenden abgeschlossenen Unteralgebren von A herstellen. Und zwar hat man jeder präkompakten minimalen Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf X die Algebra der $\mathcal{T}$-stetigen fast-periodischen Funktionen zuzuordnen. Das Urbild einer gegebenen Algebra B ist unter dieser Abbildung gerade die Initialtopologie auf X bezüglich B. Dies kann man aus [16], p.38/39, insbesondere Theorem 6, ableiten.

Wir wenden uns nun allgemein dem Zusammenhang zwischen Minimalität und Dichtheit zu. Ausgehend von einem Minimalitätskriterium von Stephenson [25] für separierte präkompakte Gruppen hat Banaschewski die dichten minimalen Untergruppen einer minimalen Gruppe charakterisiert [2]. Entsprechende Kriterien für dichte Untergruppen B_r- bzw. B-vollständiger abelscher Gruppen liegen von Sulley [27] vor. Wir verknüpfen diese Resultate und bereiten dies durch einige Definitionen und Lemmata vor.

1.8 Definition. Eine separierte Gruppe X nennt man B_r-vollständig (bzw. B-vollständig), wenn jeder injektive (bzw. jeder) stetige fast-offene surjektive Homomorphismus $f:X \longrightarrow Z$ von X auf eine separierte Gruppe Z offen ist. Dabei heißt ein stetiger Homomorphismus $f:X \longrightarrow Z$ fast-offen, wenn für jede Umgebung U aus $\mathcal{U}_e(X)$ der Abschluß $\overline{f(U)}$ von f(U) aus $\mathcal{U}_e(Z)$ ist.

1.9 Bemerkungen (vgl. auch 1.15).

(a) Eine separierte Gruppe X ist genau dann B-vollständig, wenn für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von X der Quotient X/N B_r-vollständig ist.

(b) Ferner ist eine separierte Gruppe (X,τ) genau dann B_r-vollständig (bzw. B-vollständig), wenn für jede separierte Gruppentopologie τ' auf X mit $\tau' \subset \tau$ (bzw. wenn für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von (X,τ) und jede separierte Gruppentopologie $\mathfrak{T}$ auf X/N mit $\mathfrak{T} \subset \tau/N$) gilt: ist

$$\{\overline{U}^{\tau} \mid U \in \mathcal{U}_e(\tau)\}$$

(bzw. $\{\overline{q_N(U)}^{\mathfrak{T}} \mid U \in \mathcal{U}_e(\tau)\}$, $q_N: X \to X/N$ kanonisch,) eine Basis von $\mathcal{U}_e(\tau)$ (bzw. $\mathcal{U}_e(\mathfrak{T})$), so folgt $\tau' = \tau$ (bzw. $\mathfrak{T} = \tau/N$).

Beweis. Teil (a) ist leicht zu sehen. Bei Teil (b) ist im B_r-vollständigen Fall die Notwendigkeit der angegebenen Bedingung klar. Für diesen Fall gelte nun umgekehrt die Bedingung und es sei

$$f:(X,\tau) \longrightarrow (Z,\zeta)$$

ein stetiger fast-offener bijektiver Homomorphismus von (X,τ) auf eine separierte Gruppe (Z,ζ). Bezeichnet τ' die Initial-

topologie bezüglich $f:X\longrightarrow(Z,\zeta)$, so ist für jedes U aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ der Abschluß

$$\overline{U}^{\tau} = f^{-1}(f(\overline{U}^{\tau})) = f^{-1}(\overline{f(U)}^{\zeta})$$

aus $\mathcal{U}_e(\tau)$. Wegen $\tau\subset\zeta$ ist

$$\{\overline{U}^{\tau} \mid U\in\mathcal{U}_e(\zeta)\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}_e(\tau)$. Die Bedingung liefert $\tau=\zeta$. Da f bezüglich τ offen ist, ist der Beweis für den B_r-vollständigen Fall beendet. Den B-vollständigen Fall leitet man jetzt aus Teil (a) ab. ./.

Wir halten auch fest, daß die Aussage in [18], Proposition 7, § 31, p.92, daß sich B_r-Vollständigkeit auf separierte Quotienten vererbt, falsch ist. Ein Gegenbeispiel stellt die von L.J. Sulley in [27], p.278, Cor. 2, angegebene Gruppe

$$G = \bigcup_{m\in M} T_m,$$

versehen mit der vom Einheitskreis induzierten Topologie, dar. Dabei bezeichnet T_n für n aus $\mathbb{N}$ die Gruppe der komplexen n-ten Einheitswurzeln und M die Menge aller quadratfreien Produkte von Primzahlen.

1.10 Definitionen (vgl. B. Banaschewski [2]). Seien X und Y separierte Gruppen und sei $h:Y\longrightarrow X$ ein stetiger injektiver Homomorphismus.
Dann heißt h wesentlich (bzw. q-wesentlich), wenn für jeden stetigen Homomorphismus $f : X\longrightarrow Z$ von X in eine separierte Gruppe Z gilt:

ist $f\circ h$ injektiv, so folgt: f ist injektiv
(bzw. ist f offen aufs Bild, so folgt: $f\circ h$ ist offen aufs Bild).

Ist Y Untergruppe von X und h die Einbettung von Y in X, so bezeichnen wir Y als wesentliche (bzw. q-wesentliche Untergruppe, wenn h wesentlich (bzw. q-wesentlich) ist.

Wesentlichkeit und q-Wesentlichkeit sind transitive Eigenschaften. Eine Untergruppe Y einer separierten Gruppe X ist genau dann wesentlich, wenn für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von X gilt:

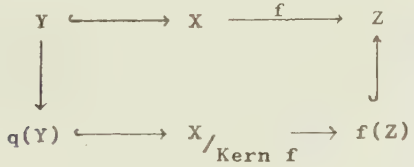
aus $N\cap Y = \{e\}$ folgt $N = \{e\}$ ([2], Proposition 2).

Mit Hilfe des nächsten Lemmas lassen sich q-wesentliche dichte Untergruppen separierter Gruppen entsprechend charakterisieren. Der von Sulley für den abelschen Fall gegebene Beweis ist übertragbar.

1.11 Lemma (Sulley [27], p.275). Sei Y eine dichte Untergruppe der separierten Gruppe X, N ein abgeschlossener Normalteiler von X, $q: X \to X/N$ die Quotientenabbildung und r der induzierte stetige fast-offene Homomorphismus von Y auf q(Y). Dann sind äquivalent:
(a) r ist offen.
(b) $N \cap Y$ ist dicht in N. ./.

1.12. Behauptung. Für eine dichte Untergruppe Y einer separierten Gruppe X sind äquivalent:
(a) Y ist q-wesentlich.
(b) Für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von X gilt: $N \cap Y$ ist dicht in N.
(c) Für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von X ist $q_N(Y)$ wesentliche Untergruppe von X/N ($q_N: X \to X/N$ kanonisch).

Beweis. Ein Beweis für die Äquivalenz von (a) und (b) ist implizit in [27] enthalten. Die Implikation (a) $\Rightarrow$ (b) ist in loc. cit., Theorem 2 (a) leicht zugänglich, ihre Umkehrung wollen wir hier ausführen.
(b) $\Rightarrow$ (a): Ist $f: X \to Z$ ein stetiger Homomorphismus in eine separierte Gruppe Z, der offen aufs Bild ist, so ist nach Voraussetzung $Y \cap \operatorname{Kern} f$ dicht in Kern f. Bezeichnet $q: X \to X/\operatorname{Kern} f$ die kanonische Abbildung, so ist die davon induzierte Abbildung $Y \longrightarrow q(Y)$ nach Lemma 1.11 offen. Man betrachte nun das Diagramm:



(b)$\Longrightarrow$(c): Es seien N bzw. M abgeschlossene Normalteiler von X bzw. $X/_N$ derart, daß

$$M \cap q_N(Y) = \{e\}$$

ist. Setzt man $L := q_N^{-1}(M)$, so ist nach Voraussetzung $L \cap Y$ dicht in L. Aus

$$\begin{aligned} L = \overline{L \cap Y} &\subset \overline{L \cap q_N^{-1}(q_N(Y))} \\ &= \overline{q_N^{-1}(M \cap q_N(Y))} \\ &= \overline{q_N^{-1}(\{e\})} = \overline{N} = N \end{aligned}$$

folgt $q_N(L) = M = \{e\}$.

(c)$\Longrightarrow$(b): Sei jetzt L ein abgeschlossener Normalteiler von X. Für $N := \overline{L \cap Y}^X \subset L$ ist die Inklusion $N \supset L$ zu zeigen. Zunächst hat $q_N(L)$ trivialen Durchschnitt mit $q_N(Y)$: Sei xN aus $q_N(L) \cap q_N(Y)$. Es existiert ein l aus L und ein y aus Y, so daß $xN = lN = yN$ ist. Deshalb ist y aus

$$lN \cap Y = l.\overline{(L \cap Y)}^X \cap Y \subset L \cap Y \subset N,$$

so daß auch x zu N gehört.
Nun liefert die Voraussetzung: $q_N(L) = \{e\}$, woraus $L = N$ folgt. ./.

Schließlich stützen wir uns auf ein fundamentales Lemma, das wir in späteren Paragraphen noch häufig verwenden werden.

1.13 Lemma (W. Roelcke). Sei X eine Gruppe.

(a) Sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ vergleichbare Gruppentopologien auf X und ist G eine Untergruppe von X, so gilt:

aus $\mathfrak{T}|G = \mathfrak{T}|G$ und $\mathfrak{T}/_G = \mathfrak{T}/_G$ folgt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$.

(b) Sind $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ vergleichbare Gruppentopologien auf X und ist Y eine Untergruppe von X, die dicht in der feineren Topologie ist, so gilt:

aus $\mathfrak{T}|Y = \mathfrak{T}|Y$ folgt $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$.

(c) Ist X eine topologische Gruppe, Y eine dichte Untergruppe von X und $f:X \longrightarrow Z$ ein injektiver stetiger Homomorphismus von X in eine topologische Gruppe Z, so gilt:

ist $f|Y$ offen aufs Bild, so folgt: f ist offen aufs Bild.

Beweis.

(a) Sei etwa $\tau \subset \sigma$ und sei U' aus $\mathcal{U}_e(\sigma)$ gegeben. Wähle U aus $\mathcal{U}_e(\sigma)$ so, daß $U^2 \subset U'$ ist. Es gibt ein V aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ mit der Eigenschaft

$$V^{-1}.V \cap G \subset U \cap G.$$

Da $U \cap V$ aus $\mathcal{U}_e(\sigma)$ ist, gibt es wegen $\tau/_G = \sigma/_G$ ein W aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ derart, daß $W \subset V$ und

$$W.G \subset (U \cap V).G \text{ ist.}$$

Jedes w aus W besitzt eine Darstellung $w = ug$ mit u aus $U \cap V$ und g aus G. Es ist $g = u^{-1} w$ aus

$$(U \cap V)^{-1}.\ w \subset V^{-1}.V$$

und folglich w aus

$$(U \cap V).(G \cap V^{-1}.V).$$

Also gilt

$$W \subset (U \cap V).(G \cap V^{-1}.V) \subset (U \cap V).U \subset U^2 \subset U',$$

womit $\mathcal{U}_e(\sigma) \subset \mathcal{U}_e(\tau)$ bewiesen ist.

(b) folgt aus (a) da die feinere der Topologien $\tau/_Y$ und $\sigma/_Y$ die gröbste Topologie auf $X/_Y$ ist.

(c) folgt aus (b), wenn man dazu mit σ die gegebene Topologie auf X und mit τ die Initialtopologie auf X bezüglich $f:X \longrightarrow Z$ bezeichnet. ./.

Das Kernstück des nachfolgenden Satzes, Teil (c), übernehmen wir ohne Beweiswiedergabe aus [2]. Gelegentlich bezeichnen wir es als Banaschewski-Kriterium. Die Teile (a) und (b) stammen für den abelschen Fall von L.J. Sulley (loc. cit.).

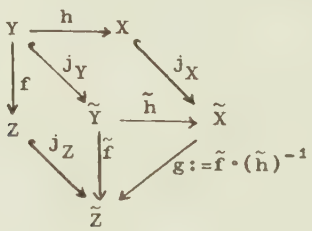
Wir vereinbaren: Ist G eine separierte Gruppe, so bezeichne $\tilde{G}$ stets die separierte Vervollständigung von G bezüglich der beidseitigen Uniformität auf G (kurz beidseitige Vervollständigung genannt).

1.14 Satz. Es sei X eine separierte Gruppe und Y eine dichte Untergruppe von X. Dann gilt in jedem der Teile (a) bis (d) die Äquivalenz der Aussagen (i) und (ii).

(a) (i) Y ist B_r-vollständig.
    (ii) X ist B_r-vollständig und Y ist wesentlich.
(b) (i) Y ist B-vollständig.
    (ii) X ist B-vollständig und Y ist q-wesentlich.
(c) (i) Y ist minimal.
    (ii) X ist minimal und Y ist wesentlich.
(d) (i) Y ist q-minimal.
    (ii) X ist q-minimal und Y ist q-wesentlich.

Beweis. Wir notieren zuerst das für sämtliche Implikationen (ii) $\Longrightarrow$ (i) verantwortliche

Banaschewski-Diagramm (BD)



Darin seien

X und Z separierte Gruppen,
Y eine dichte Untergruppe von X,
h die Einbettung von Y in X,
f ein stetiger Homomorphismus,
j_G die Einbettung von G in $\tilde{G}$ (G separierte Gruppe),
$\tilde{f}_1$ die gleichmäßig stetige Fortsetzung $\tilde{f}_1:\tilde{G}\to\tilde{H}$ von f_1, wenn $f_1:G\to H$ ein stetiger Homomorphismus der separierten Gruppen G und H ist.

(a) Die Richtung (i) $\Rightarrow$ (ii) verläuft wie im abelschen Fall ([27], Th. 2 (b) und Th. 3 (b) bzw. Th. 3 (a)) unter Beachtung von Lemma 1.13 (c). Für die Umkehrung kopiert man B. Banaschewskis Beweis in [2], p.109. Sei dazu Y in (BD) wesentlich und f bijektiv und fast-offen. Es ist $(g\circ j_X)\circ h = j_Z\circ f$ injektiv und fast offen. Also ist $g\circ j_X$ injektiv, da h wesentlich ist, und fast-offen, da h stetig ist. Aufgrund der B_r-Vollständigkeit von X ist $g\circ j_X$ offen aufs Bild und folglich auch $(g\circ j_X)\circ h$. Die Offenheit von f ergibt sich nun daraus, daß $j_Z\circ f$ und j_Z offen aufs Bild sind.

(b) Für (i) $\Rightarrow$ (ii) kann man sich wieder auf [27] (Th. 2 (a) und Th. 3 (a)) zurückziehen. Um (ii) $\Rightarrow$ (i) zu zeigen, sei Y in (BD) q-wesentlich, aber f nur zusätzlich surjektiv und fast-offen. Dann ist $\tilde{f}$ fast-offen und somit sind es auch g und $g\circ j_X$. Die B-Vollständigkeit von X liefert, daß $g\circ j_X$ offen aufs Bild ist, die q-Wesentlichkeit von Y liefert, daß $(g\circ j_X)\circ h = j_Z\circ f$ offen aufs Bild ist. Es folgt die Offenheit von f.

(c) s. loc. cit..

(d) Für (i) $\Rightarrow$ (ii) reicht jetzt das Argument:

Y q-minimal $\Rightarrow$ Y B-vollständig $\Rightarrow$ Y q-wesentlich

und der Hinweis, daß für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von X der Quotient X/N eine dichte minimale Untergruppe besitzt, nämlich $q_N(Y)$ ($q_N : X \longrightarrow X/N$ kanonisch), also nach (c) - oder 1.13 (b) - minimal ist. Wir setzen nun (ii) voraus. Ist N ein abgeschlossener Normalteiler von Y und $L := \overline{N}^X$, so ist X/L minimal. Nach 1.12 (c) ist $q_L(Y) \cong Y/N$ wesentliche, also minimale Untergruppe von X/L ($q_L : X \longrightarrow X/L$ kanonisch). ./.

B-vollständige Gruppen sind im allgemeinen nicht minimal, wie sich am Beispiel nicht-minimaler diskreter Gruppen zeigt (vgl. auch [18], p.90). Jedoch gilt

1.15 Folgerung. Dichte Untergruppen minimaler (bzw. q-minimaler) Gruppen sind genau dann minimal (bzw. q-minimal), wenn sie B_r-vollständig (bzw. B-vollständig) sind. Insbesondere sind präkompakte B_r-vollständige (bzw. B-vollständige) Gruppen minimal (bzw. q-minimal).

Aus Folgerung 1.15 ergibt sich die Existenz minimaler abelscher Gruppen, die nicht q-minimal sind (vgl. das Beispiel nach 1.9). Außerdem folgt aus 1.15, daß direkte Produkte B-vollständiger Gruppen im allgemeinen nicht B_r-vollständig sind (z.B. ist $\mathbb{Z}$, versehen mit der p-adischen Topologie bzgl. einer Primzahl p q-minimal, aber $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ nicht minimal, [8], p.60). Am Beispiel einer lokalkompakten metrisierbaren und minimalen aber nicht q-minimalen Gruppe wird sich im nächsten Paragraphen zeigen, daß B-vollständige minimale Gruppen nicht q-minimal zu sein brauchen (vgl. [18], p.90, Th. 3).

§ 2 Lokalkompakte nicht-kompakte minimale Gruppen

Die Literatur ließ bisher offen, ob es lokalkompakte nicht-kompakte minimale Gruppen gibt oder nicht. Die Existenz solcher Gruppen ist das wichtigste Ergebnis dieses Paragraphen. Wir beweisen einerseits, daß eine wohlbekannte abgeschlossene Untergruppe der Matrizengruppe GL (2, $\mathbb{R}$), versehen mit der Standardtopologie, minimal ist und zum anderen, daß ein für jede topologische Gruppe K und jede diskrete Gruppe H kanonisch erklärbares topologisches semi-direktes Produkt $K \overset{H}{\underset{\sigma}{\times}} H$ minimal ist, wenn **K eine kompakte nicht-triviale Gruppe ist.**

Es sei zunächst an folgenden Sachverhalt erinnert: Sind G und H topologische Gruppen und ist $X = G \underset{\sigma}{\times} H$ das semi-direkte Produkt der (abstrakten) Gruppen G und H bezüglich eines Homomorphismus $\sigma: H \to \mathrm{Aut}(G)$, so ist die von den Topologien auf G und H herrührende Produkttopologie auf X genau dann eine Gruppentopologie, wenn die Abbildung

$$H \times G \to G, \quad (y,x) \longmapsto \sigma_y(x)$$

stetig ist. Ist andrerseits $\mathcal{T}$ eine gegebene Gruppentopologie auf X, so ist insbesondere die Abbildung

$$(H, \mathcal{T}|H) \times (G, \mathcal{T}|G) \to (G, \mathcal{T}|G), \quad (y,x) \mapsto \sigma_y(x),$$

aufgrund der Darstellung

$$(\sigma_y(x), e) = (e,y)\,(x,e)\,(e,y)^{-1} \qquad (x \in G,\ y \in H)$$

stetig. (Bei einem äußeren topologischen semi-direkten Produkt $X = G \underset{\sigma}{\times} H$ identifizieren wir der kürzeren Schreibweise wegen gelegentlich $G \times \{e\}$ mit G bzw. $\{e\} \times H$ mit H und fassen X als inneres topologisches semi-direktes Produkt von G und H auf.)

Wir betrachten nun die Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{R}) \mid y>0,\ x \in \mathbb{R} \right\},$$

versehen mit der Standardtopologie. Diese kann als topologisches

semi-direktes Produkt $\mathbb{R} \underset{\sigma}{\times} \mathbb{R}_+^*$ der (jeweils mit der Standardtopologie versehenen) additiven Gruppe $\mathbb{R}$ und multiplikativen Gruppe $\mathbb{R}_+^*$ bezüglich des Homomorphismus

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{R}) \\ y &\longmapsto \sigma_y \qquad \text{mit} \\ & \sigma_y(x) := y.x \end{aligned}$$

aufgefaßt werden (ähnlich kann sie auch als topologisches semi-direktes Produkt von $\mathbb{R}$ und $\mathbb{R}$ selbst aufgefaßt werden).

2.1 Ist $(X,\mathcal{T})$ ein lokalkompakter Raum und $\mathcal{T}'$ eine weitere separierte Topologie auf X mit $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$, so stimmen offenbar die Relativtopologien von $\mathcal{T}'$ und $\mathcal{T}$ auf jedem $\mathcal{T}$-Kompaktum überein. Deshalb gilt: Ist $(X,\mathcal{T})$ eine lokalkompakte Gruppe und $\mathcal{T}'$ eine separierte Gruppentopologie auf X mit $\mathcal{T}' \subsetneq \mathcal{T}$, so ist keine $\mathcal{T}'$-Umgebung von e relativ kompakt in $(X,\mathcal{T})$.

2.2 Satz. Das oben beschriebene topologische semi-direkte Produkt

$$X := \mathbb{R} \underset{\sigma}{\times} \mathbb{R}_+^*$$

ist minimal.

Beweis. Seien $\mathcal{T}_1$ bzw. $\mathcal{T}_2$ die Standardtopologien auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}_+^*$ und sei $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$. Sei weiter $\mathcal{T}'$ eine separierte Gruppentopologie auf X mit $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$ und sei $\mathcal{T}_1' := \mathcal{T}'|\mathbb{R}$ und $\mathcal{T}_2' := \mathcal{T}'|\mathbb{R}_+^*$. Es wird der Reihe nach jeweils durch Widerspruch gezeigt, daß (I) $\mathcal{T}_1' = \mathcal{T}_1$, (II) $\mathcal{T}_2' = \mathcal{T}_2$ und schließlich (III) $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ gelten muß.

(I) Annahme: $\mathcal{T}_1' \subsetneq \mathcal{T}_1$.

Sei U eine beliebige $\mathcal{T}_1'$-Umgebung der Null und sei V eine dazu gewählte $\mathcal{T}_1$-Umgebung der Null mit $V-V \subset U$. Wegen $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_2$ (und dem eingangs des Paragraphen erwähnten Sachverhalt) ist die Abbildung

$$(\mathbb{R}, \mathcal{T}_1') \times (\mathbb{R}_+^*, \mathcal{T}_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{T}_1), \quad (x,y) \longmapsto y.x$$

stetig. Zu V existiert demnach eine symmetrische $\mathcal{T}_1'$-Umgebung W der Null und ein festes ε mit $\varepsilon > 0$ so, daß gilt: für alle

x aus W und alle y aus $\mathbb{R}_+^*$ mit $|y-1|<\varepsilon$ ist y.x aus V. Da $\tau_1 \subsetneq \tau_1$ ist, liefert 2.1, daß zu jedem n aus $\mathbb{N}$ ein x_n aus W existiert mit $x_n > n$. Es umfaßt V die Menge

$$\{y.x_n \mid y \in \mathbb{R}_+^*, |y-1|<\varepsilon, n\in\mathbb{N}\},$$

so daß folgt

$$\begin{aligned} U \supset V-V &\supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\{y.x_n \mid y \in \mathbb{R}_+^*, |y-1|<\varepsilon\} - x_n) \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(y-1).x_n \mid y \in \mathbb{R}_+^*, |y-1|<\varepsilon\} \\ &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\varepsilon.x_n, \varepsilon.x_n[\;= \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Danach wäre τ_1 die gröbste Topologie auf $\mathbb{R}$, also nicht separiert. Widerspruch.

(II) Annahme: $\tau_2 \subsetneq \tau_2$.

Nach (I) ist $\tau_1 = \tau_1$, so daß jetzt die Abbildung

$$(\mathbb{R}, \tau_1) \times (\mathbb{R}_+^*, \tau_2) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau_1), \quad (y,x) \longrightarrow y.x$$

stetig ist. Zu jeder beschränkten τ_1-Umgebung U der Null gibt es dann eine τ_1-Umgebung V der Null und eine symmetrische τ_2-Umgebung W der Eins so, daß $V.W \subset U$ ist. Dies steht im Widerspruch dazu, daß $\tau_2 \subsetneq \tau_2$ ist und folglich W nach 2.1 unbeschränkt sein müßte.

(III) Annahme: $\tau \subsetneq \tau$.

Wegen $\tau_1 = \tau_1$ gilt (vgl. Lemma 1.13):

$$\tau/(\mathbb{R} \times \{1\}) \subsetneq \tau/(\mathbb{R} \times \{1\}).$$

Es ist $(\mathbb{R}, \tau_1)$ vollständig, also $\tau/(\mathbb{R} \times \{1\})$ separiert. Sei U eine beliebige τ-Umgebung von (0,1) und V eine dazu gewählte symmetrische τ-Umgebung von (0,1) mit $V^3 \subset U$. Sei weiter q die kanonische Abbildung

$$q : X \longrightarrow X/(\mathbb{R} \times \{1\}).$$

Da $\tau/(\mathbb{R} \times \{1\})$ lokalkompakt ist, gibt es nach 2.1 zu jedem n aus $\mathbb{N}$ ein z_n aus $q(V)$, das nicht in $q([-1,1] \times [\frac{1}{n}, n])$ liegt. In V selbst existiert also eine Folge $((0, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ so, daß $y_n > n$ ist für jedes n aus $\mathbb{N}$ (denn mit $(0, y_n)$ gehört auch $\left(0, \frac{1}{y_n}\right)$ zu V und es ist $q([-1,1] \times [\frac{1}{n}, n]) = q(\mathbb{R} \times [\frac{1}{n}, n])$).

Da $\tau \subset \tau$ ist, gibt es ein festes ε mit $\varepsilon > 0$ und

$$]-\varepsilon, \varepsilon[\times]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[\subset V.$$

Für jedes n aus $\mathbb{N}$ und x aus $]-\varepsilon,\varepsilon[$ ist somit

$$(y_n.x,1) = (x_n,y_n)\,(x,1)\,(x_n,y_n)^{-1}$$

aus V^3. Daraus folgt

$$U \supset V^3 \supset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{(y_n.x,1) \mid x \in]-\varepsilon,\varepsilon[\,\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (]-y_n.\varepsilon, y_n.\varepsilon[\times \{1\}) = R \times \{1\}.$$

Widerspruch. ./.

Für die Minimalität eines direkten Produkts G x H zweier separierter Gruppen G und H ist offenbar die Minimalität von G und H selbst notwendig. Dagegen gilt:

2.3 Folgerung. Ein topologisches semidirektes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ zweier separierter nicht-minimaler Gruppen G und H kann minimal sein. Insbesondere braucht ein abgeschlossener Normalteiler einer minimalen Gruppe nicht minimal zu sein.

Wir konstruieren nun das zweite angekündigte Beispiel einer lokalkompakten nicht-kompakten minimalen Gruppe.
Sei K eine kompakte nicht-triviale Gruppe und (H,ϑ) eine diskrete Gruppe. Wir setzen

$$G := K^H$$

und bezeichnen mit τ die Produkttopologie auf G. Man überzeugt sich leicht, daß die durch

$$\sigma : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G), \quad y \longmapsto \sigma_y \text{ mit } \sigma_y\big((x_h)_{h\in H}\big) := (x_{hy})_{h\in H}$$

erklärte Abbildung σ tatsächlich in Aut(G) führt, daß σ ein Homomorphismus ist und daß für jedes y aus H die Abbildung σ_y stetig ist im neutralen Element von G. Für jedes y aus H ist dann σ_y wegen $\sigma_{y^{-1}} = (\sigma_y)^{-1}$ schon ein topologischer Automorphismus, und folglich ist die Abbildung

$$(H,\vartheta) \times (G,\tau) \longrightarrow (G,\tau),\ (y,x) \longmapsto \sigma_y(x)$$

stetig.

2.4. Satz. Das eben beschriebene topologische semi-direkte Produkt

$$X := (G,\mathfrak{T}) \underset{\sigma}{\times} (H,\mathfrak{H})$$

ist minimal. (Dieses Ergebnis wurde für $H = \mathbb{Z}$ und eine endliche Gruppe K zuerst von S. Dierolf bewiesen.)

Beweis. Wir verfahren wie im Beweis von Satz 2.2.
Sei $\mathfrak{T}$ eine separierte Gruppentopologie auf der abstrakten Gruppe X mit $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T} \times \mathfrak{H}$. Da $\mathfrak{T}$ kompakt ist, folgt unmittelbar $\mathfrak{T}|G = \mathfrak{T}$.

Sei U aus $\mathcal{U}_e(K)$ so, daß $U \neq K$ ist. Da die Abbildung

$$(H,\mathfrak{T}|H) \times (G,\mathfrak{T}) \longrightarrow (G,\mathfrak{T}),\ (y,x) \longmapsto \sigma_y(x)$$

in (e,e) stetig ist, gibt es ein V aus $\mathcal{U}_e(H,\mathfrak{T}|H)$ und eine endliche Teilmenge $E \subset H$ derart, daß gilt:

Für alle y aus V und für alle $(x_h)_{h\,H}$ aus G, für die $x_h = e$ (e = neutrales Element von K) ist, wenn h aus E ist, ist x_y ein Element von U.
Aus $U \neq K$ folgt, daß jedes y aus V zu E gehört und infolgedessen V endlich ist. Damit ist $\mathfrak{T}|H$ als separierte Gruppentopologie diskret, also gleich $\mathfrak{H}$.
Ferner ist $(X/_H, \mathfrak{T}/_H)$ ein separierter Raum. Bezeichnet q die kanonische Abbildung von X auf $X/_H$, so ist

$$q|G : (G,\mathfrak{T}|G) \longrightarrow (X/_H,\ \mathfrak{T}/_H)$$

als stetige Bijektion von einem kompakten Raum in einen separierten Raum ein Homöomorphismus. Nach [23] ist $(X,\mathfrak{T})$ topologisches semi-direktes Produkt von $(G,\mathfrak{T}|G)$ und $(H,\mathfrak{T}|H)$, also $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$. ./.

2.5. Folgerung. Man kann jede diskrete Gruppe H in eine lokalkompakte minimale Gruppe X einbetten derart, daß $\operatorname{card} X \leq 2^{\operatorname{card} H}$ ist.

Das Beweisverfahren in 2.4 leistet nichts zur Frage, ob jede separierte Gruppe in eine minimale Gruppe eingebettet werden kann: Für eine kompakte Gruppe K ist das betrachtete semi-

direkte Produkt $K^H \underset{\sigma}{\times} H$ gemäß Satz 2.4 nur dann ein topologisches semi-direktes Produkt, wenn man H diskret topologisiert (insbesondere ist für jede separierte nicht-diskrete Gruppentopologie $\mathfrak{T}$ auf H die Produkttopologie $\mathfrak{T} \times \mathfrak{T}$ auf $K^H \underset{\sigma}{\times} H$ keine Gruppentopologie). Denkt man nun zunächst nur an eine separierte Gruppe K, so müßte beweistechnisch spätestens für den Schluß

" $q|K^H : K^H \longrightarrow (K^H \underset{\sigma}{\times} H)/_H$ ist ein Homöomorphismus"

die Topologie auf K^H minimal-Hausdorff sein. Dann aber hätte K^H (und also K) als regulärer Raum, der minimal-Hausdorff ist, nachträglich doch kompakt zu sein (vgl.[3], Th. 3.1 (b) und Th. 3.3 (a)).

Es ist unbekannt, ob offene Normalteiler minimaler Gruppen nicht-minimal sein können. In obiger Konstruktion ist K^H stets ein offener, allerdings kompakter Normalteiler von $K^H \underset{\sigma}{\times} H$. Die sich aufdrängende Frage, ob $K^{(H)} \underset{\sigma'}{\times} H$ minimal sein kann, ohne daß $K^{(H)}$ es ist, muß verneint werden (σ' bezeichne den von σ induzierten Homomorphismus): Wir werden in 5.5 zeigen, daß ein schwach direktes Produkt $K^{(I)}$ bezüglich einer kompakten Gruppe K und bezüglich einer unendlichen Indexmenge I minimal ist, wenn K zentrumslos ist. Die erwähnte Verneinung ergibt sich deshalb aus:

2.6 Behauptung (vgl. 7.9). Sei K eine kompakte nicht-triviale Gruppe und H eine unendliche diskrete Gruppe. Sei σ wie vor Satz 2.4 definiert und sei σ' der durch $\sigma'_y(x) := \sigma_y(x)$ erklärte Homomorphismus von H in $\mathrm{Aut}(K^{(H)})$. Das topologische semi-direkte Produkt $K^{(H)} \underset{\sigma'}{\times} H$ sei minimal. Dann ist K zentrumslos.

Beweis. Für x aus K sei $\underline{x} := (x)_{h \in H}$. Sei Z das Zentrum von K und sei

$$N := \{(\underline{1}, e) \mid 1 \in Z\}.$$

Offenbar ist N abgeschlossene Untergruppe von $K^H \underset{\sigma}{\times} H$. Für (x,y) aus $K^H \underset{\sigma}{\times} H$ und l aus Z ist

$$(x,y)(\underline{1}, e)(x,y)^{-1} = (\underline{1}, e),$$

so daß N auch Normalteiler von $K^H \underset{\sigma}{\times} H$ ist. Da N mit der

dichten minimalen Untergruppe $K^{(H)} \underset{\sigma}{\times} H$ von $K^H \underset{\sigma}{\times} H$ trivialen Durchschnitt hat, folgt aus 1.14 (c) und S.10 unten: $N=\{e\}$. ./.

Wir beenden den Paragraphen mit dem Hinweis, daß die Existenz lokalkompakter nicht-kompakter q-minimaler Gruppen ungeklärt bleibt. Die Gruppe $\mathbb{R} \underset{\sigma}{\times} \mathbb{R}_+^*$ ist nicht q-minimal. Dagegen müßte in bezug auf das Beispiel $K^H \underset{\sigma}{\times} H$ zuerst eine positive Antwort auf die offene Frage, ob es unendliche diskrete q-minimale Gruppen gibt, gefunden werden, was dann eine weitere Untersuchung dieses Beispiels in dieser Hinsicht erübrigen würde.

§ 3 Zur Standardtopologie auf R

Auf R gibt es nach P.R. Halmos [12] kompakte, also insbesondere minimale Gruppentopologien (vgl. auch [13] und [24]). Diese sind mit der Standardtopologie $\mathfrak{T}_0$ auf R nicht vergleichbar (in diesem Paragraphen sei das Symbol $\mathfrak{T}_0$ ausnahmslos für die Standardtopologie auf R reserviert).

D. Doitchinov [9] hat im Jahre 1972 die Frage formuliert, ob es auf R auch minimale Gruppentopologien gibt, die gröber als $\mathfrak{T}_0$ sind. Unter Verwendung verschiedener Resultate von I. Prodanov aus den Jahren 1972/73 und 1977 können wir diese Frage und unter anderem ihr Analogon bezüglich Q negativ beantworten (vgl. hierzu auch [14], Satz 21).

Von N. Bourbaki wird in [5], Ch. V, § 1, exercise 2, fälschlicherweise die Behauptung aufgestellt, daß jede separierte Gruppentopologie auf Z bzw. R, die echt gröber als die diskrete Topologie bzw. die Standardtopologie ist, präkompakt sei (die diskrete Topologie auf Z werden wir der Analogie wegen in diesem Paragraphen stets mit ϑ_0 bezeichnen). Bei Zutreffen dieser Behauptung für R wäre es eine unmittelbare Konsequenz der Prodanov'schen Resultate von 1972/73 gewesen, daß auf R keine minimale Gruppentopologie existiert, die gröber als $\mathfrak{T}_0$ ist.

Die entscheidende Überlegung zur Widerlegung der Behauptung von N. Bourbaki stammt von W. Roelcke. Er hat als erster separierte nicht-präkompakte nicht-diskrete Gruppentopologien auf Z konstruiert. Zuvor schon hatte S. Dierolf gezeigt, daß die Richtigkeit der Aussagen im einzelnen nur von der Richtigkeit der betreffenden Aussage für Z abhängt.

In einer korrigierten Fassung der Behauptung von N. Bourbaki charakterisieren wir alle separierten präkompakten Gruppentopologien auf Z bzw. R, die echt gröber als ϑ_0 bzw. $\mathfrak{T}_0$ sind. Auf der Grundlage der Ergebnisse von W. Roelcke und S. Dierolf zeigen wir dann, daß jeweils zwischen ϑ_0 und einer p-adischen Topologie $\mathfrak{T}_p$ auf Z (p aus N, $p \geq 2$) bzw. zwischen $\mathfrak{T}_0$ und der unteren Grenze von $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{T}_p$ (jetzt aufgefaßt als Gruppentopologie auf R) abzählbar unendlich viele separierte nicht-präkompakte Gruppentopologien liegen.

Durch eine geeignete Interpretation des Beweises von I. Prodanov [20] für die Aussage, daß auf der additiven Gruppe eines nicht-trivialen reellen (oder komplexen) topologischen Vektorraumes keine präkompakte minimale Gruppentopologie existiert, die gröber als die Vektorraumtopologie ist, gewinnen wir die entsprechende Aussage auch für alle dichten Untergruppen dieser additiven Gruppe und haben gleichzeitig Gelegenheit, die wichtigsten Überlegungen des ausgesprochenen Beweises zu rekapitulieren.

3.1 Definition. Eine Untergruppe H der Charaktergruppe einer abelschen Gruppe X nennen wir minimal trennend, wenn H die Punkte von X trennt, aber keine echte Untergruppe von H dies tut.

3.2 Satz. Auf einer dichten Untergruppe X der additiven Gruppe eines nicht-trivialen reellen topologischen Vektorraumes E gibt es keine präkompakte minimale Gruppentopologie, die gröber als die relativierte Vektorraumtopologie $\mathcal{T}$ auf X ist.

Beweis (vgl. [20], [19]). Man verwendet 1.7 (c) und zeigt, daß die Charaktergruppe von X keine minimal trennende Untergruppe aus $\mathcal{T}$-stetigen Charakteren besitzt. Sei zunächst H eine Gruppe $\mathcal{T}$-stetiger Charaktere von X, die die Punkte von X trennt. Bezeichnet Γ die Gruppe aller stetigen (reellwertigen) linearen Funktionale l auf E, zu denen es ein χ aus H so gibt, daß die stetige Fortsetzung $\bar{\chi}$ von χ auf E gleich $\exp \circ (2\pi i l)$ ist, so gilt:

(i) $H = \{ \exp \circ (2\pi i l | X) \mid l \in \Gamma \}$ und

(ii) der surjektive Homomorphismus

$$\Phi: \Gamma \longrightarrow H,\ l \longmapsto \exp \circ (2\pi i l | X)$$

ist injektiv.

Denn ist χ aus H, so existiert zu $\bar{\chi}$ nach [15], (23.32) ein stetiges lineares Funktional l derart, daß $\bar{\chi} = \exp \circ (2\pi i l)$ ist, weshalb (i) klar ist. Um die Injektivität des Homomorphismus Φ zu zeigen, sei l aus Γ derart, daß $\Phi(l)$ der triviale Charakter von X ist. Dann ist die stetige Fortsetzung von $\Phi(l)$ auf E der triviale Charakter von E und es folgt, daß für jedes

x aus E der Wert $l(x)$ aus $\mathbb{Z}$ ist. Dies ist aber nur für $l = 0$ möglich (lediglich hier benötigen wir, daß es sich bei den Elementen von Γ tatsächlich um lineare Funktionale und nicht nur um reelle Charaktere handelt - vgl. [15], (24.43)).

Nimmt man jetzt an, daß H minimal trennend ist, so hat die Injektivität von Φ zur Folge, daß für jede Untergruppe Γ_o von Γ gilt: hat Γ_o die Separationseigenschaft:

(S) { für jedes x aus $X \setminus \{0\}$ gibt es ein l aus Γ_o derart, daß $l(x)$ nicht aus $\mathbb{Z}$ ist,

so ist $\Gamma_o = \Gamma$.

Sei k aus $\mathbb{N}$. Dann hat auch $k\Gamma$ die Eigenschaft (S), denn mit x aus $X \setminus \{0\}$ ist auch kx aus $X \setminus \{0\}$ und zu kx existiert ein l aus Γ, für das $l(kx) = kl(x)$ nicht aus $\mathbb{Z}$ ist. Somit ist $k\Gamma = \Gamma$ und zu jedem l aus Γ gibt es ein l_1 aus Γ so, daß $kl_1 = l$, d.h. $\frac{1}{k}\, l$ aus Γ ist. Es folgt, daß Γ ein linearer Raum über $\mathbb{Q}$ ist.

Sei B eine Hamelbasis von Γ. Dann ist die Menge Γ_1 aller endlichen Linearkombinationen $\sum_i z_i 2^{-n_i} b_i$ mit z_i aus $\mathbb{Z}$, n_i aus $\mathbb{N}$ und b_i aus B eine echte Untergruppe von Γ, die auch die Eigenschaft (S) hat. Widerspruch. ./.

3.3 Folgerung. Auf einer dichten Untergruppe von $(\mathbb{R}, \tau_o)^I$ (I nicht-leere Indexmenge) gibt es keine präkompakte minimale Gruppentopologie, die gröber als die Relativtopologie bezüglich τ_o^I ist.

Da minimale abzählbare abelsche Gruppen präkompakt sind (I. Prodanov [22]), ergibt sich

3.4 Folgerung. Auf einer dichten abzählbaren Untergruppe eines reellen topologischen nicht-trivialen Vektorraumes gibt es keine minimale Gruppentopologie, die gröber als die relativierte Vektorraumtopologie ist. Insbesondere gibt es also auf $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}^{(\mathbb{N})}$, $a\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}$ (a jeweils aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$) keine minimale Gruppentopologie, die gröber als die jeweilige relativierte Standardtopologie ist.

Um auch $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_o)$ selbst zu erfassen, zeigen wir

3.5 Behauptung. Auf einem nicht-trivialen $\mathbb{Q}$-Vektorraum $X \subset \mathbb{R}$ gibt es keine minimale Gruppentopologie, die gröber als die relativierte Standardtopologie $\mathcal{T}$ ist.

Beweis. Wir zeigen, daß jeder Quotient von $(X,\mathcal{T})$ nach einer abgeschlossenen nicht-trivialen Untergruppe minimal ist. Gäbe es dann eine minimale Gruppentopologie auf X, die gröber als $\mathcal{T}$ ist, so wäre diese q-minimal, also präkompakt nach I. Prodanov [21], was wieder Folgerung 3.3 widersprechen würde. Sei also $G \neq \{0\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von $(X,\mathcal{T})$, o.E. $G \neq X$. Nach [5], Ch. V, § 1.1, Proposition 1, existiert ein a aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ so, daß $\overline{G}^{\mathcal{T}_o} = a\mathbb{Z}$ ist. Da G dicht in der diskreten Gruppe $a\mathbb{Z}$ liegt, ist $G = a\mathbb{Z}$. Somit besitzt $(X,\mathcal{T})/_G$ in

$$a\mathbb{Q}/_{a\mathbb{Z}} \cong \mathbb{Q}/_{\mathbb{Z}}$$

eine dichte, nach [8] oder [25] minimale Untergruppe. ./.

3.6 Selbst auf einer dichten Untergruppe einer kompakten abelschen Gruppe braucht es keine minimale Gruppentopologie zu geben, die gröber als die Relativtopologie ist: Ist a aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ und $q:\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ die kanonische Abbildung ($\mathbb{R}$ versehen mit der Standardtopologie), so liefert $q(a\mathbb{Q})$ ein Beispiel hierfür, da $q|a\mathbb{Q}: a\mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}/_{\mathbb{Z}}$ injektiv und stetig ist (man beachte 3.3).

Wir beschäftigen uns jetzt mit der Bourbaki-Aufgabe. Zunächst machen wir eine Bemerkung, die - bis auf Teil (b) - nur der Vollständigkeit dienen soll.

3.7 Bemerkung. Sei $\mathcal{T}$ eine Gruppentopologie auf $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}$, die echt gröber als $\mathcal{T}_o$ bzw. ϑ_o ist. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Die Topologie $\mathcal{T}$ besitzt nur unbeschränkte offene nicht-leere Mengen.

(b) Ist $\mathcal{T}$ nicht präkompakt, so ist $\mathcal{T}$ separiert.

(c) Ist $\mathcal{T}$ separiert, so ist $\mathcal{T}$ nicht lokalkompakt.

(d) In $(\mathbb{R},\tau)$ bzw. $(\mathbb{Z},\tau)$ gibt es keine diskrete nicht-triviale Untergruppe. Darüber hinaus ist für jedes a aus $\mathbb{R}$ und jedes b aus $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ bzw. $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ der Durchschnitt $]a,\infty[\cap b\mathbb{Z}$ dicht in $b\mathbb{Z}$ bezüglich τ (man vergleiche hierzu Beweisschritt (II) in [15], Th. (9.1)).

Beweis.

(a) Für separiertes τ sei auf 2.1 verwiesen. Ist aber τ nicht separiert und etwa c aus $\overline{\{0\}}^{\tau}\setminus\{0\}$, so umfaßt jede bezüglich τ offene Umgebung der 0 die von c erzeugte Untergruppe $c\mathbb{Z}$.

(b) Man setzt die Überlegung im nicht-separierten Fall von Teil (a) fort und erhält, daß jedes U aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ eine Menge der Gestalt $c\mathbb{Z}+]-\varepsilon,\varepsilon[$ $(c\neq 0, \varepsilon>0)$ umfaßt.

(c) Folgt aus [15], Th. (5.29).

(d) Sei G eine diskrete Untergruppe von $(\mathbb{R},\tau)$ bzw. $(\mathbb{Z},\tau)$, also $G = c\mathbb{Z}$ mit c aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{Z}$. Falls τ nicht separiert ist, ist τ und somit auch G präkompakt. Es folgt die Trivialität von G. Im anderen Fall ist G als diskrete Untergruppe abgeschlossen, also $\tau/_G$ separiert. Nimmt man jetzt an, daß G nicht-trivial ist, so sind $\tau_o/_G$ bzw. $\vartheta_o/_G$ kompakt und folglich gilt $\tau/_G = \tau_o/_G$ bzw. $\tau/_G = \vartheta/_G$. Aufgrund von 1.13 ergibt sich $\tau = \tau_o$ bzw. $\tau = \vartheta_o$. Widerspruch.

Für die zusätzliche Behauptung sei $b>0$, a aus $\mathbb{R}$, z aus $\mathbb{Z}$ und U eine symmetrische Umgebung der 0 bezüglich τ. Man wähle ein n aus $\mathbb{N}$ so, daß $bn > a$ ist und dann ein m aus $\mathbb{N}$ so, daß

$$z+nm \geq n$$

ist. Nach dem zuvor Bewiesenen ist

$$U\cap bnm\mathbb{Z} \neq \{0\}.$$

Also gibt es ein l aus $\mathbb{N}$ mit bnml aus U.

Wegen

$$z+nml \geq z+nm \geq n$$

ist $bz-bnml$ aus $(bz+U)\cap]a,\infty[\cap b\mathbb{Z}$. ./.

Für jede nicht-leere Teilmenge M von $\mathbb{R}$ und jedes x aus M sei $ZK(x,M)$ die Zusammenhangskomponente von x in $(M,\tau_o|M)$. Ist A ein Intervall von $\mathbb{R}$, so bezeichne $|A|$ seine Länge.

3.8 Lemma (vgl. [5], Ch. V, § 1, ex 2b). Sei $\mathcal{T}$ eine Gruppentopologie auf $\mathbb{R}$, die echt gröber als $\mathcal{T}_0$ ist und sei $\mathcal{T}$ nicht die gröbste Topologie. Sei $U \neq \mathbb{R}$ eine offene symmetrische Umgebung der 0 bezüglich $\mathcal{T}$ und sei V eine offene symmetrische Umgebung der 0 bezüglich $\mathcal{T}$ so, daß $V+V \subset U$ ist. Dann gilt für jedes x aus V

$$|ZK(x,V)| \leq |ZK(0,U)|$$

Beweis. Sei x aus V und $A := ZK(x,V)$. Da die Subtraktion auf $\mathbb{R}$ stetig bezüglich $\mathcal{T}_0$ ist, ist $A - A$ eine $\mathcal{T}_0$-zusammenhängende Menge.
Wegen

$$0 \in A - A \subset U$$

ergibt sich

$$A - A \subset ZK(0,U)$$

und daher

$$|A| = |A - x| \leq |A - A| \leq |ZK(0,U)|. \quad ./.$$

Die korrigierte Fassung der Behauptung von N. Bourbaki ist Gegenstand des nachfolgenden Satzes.

3.9 Satz. Sei $\mathcal{T}$ eine Gruppentopologie auf $\mathbb{R}$, die gröber als $\mathcal{T}_0$ ist. Dann sind äquivalent:
(a) $\mathcal{T}$ ist präkompakt.
(b) Für jede offene symmetrische Umgebung U der 0 bezüglich $\mathcal{T}$ mit $U+U \neq \mathbb{R}$ gilt:

$$\sup \{ |ZK(x, \complement U)| \mid x \in \complement U \} < \infty .$$

Beweis. Für den Beweis von (a) $\Longrightarrow$ (b) betrachten wir unter der Voraussetzung der Präkompaktheit von $\mathcal{T}$ eine offene symmetrische Umgebung U der 0 bezüglich $\mathcal{T}$ mit $U+U \neq \mathbb{R}$ und definieren

$$L := \sup \{ |ZK(x, \complement U)| \mid x \in \complement U \} .$$

Es gibt eine endliche Menge $F \subset \mathbb{R}$ so, daß $\mathbb{R} = F + U$ ist.
Sei x aus $\complement U$. Jedes y aus $ZK(x, \complement U)$ hat eine Darstellung

$$y = b + u \text{ mit } b \text{ aus } F \text{ und } u \text{ aus } U.$$

Also gilt

$$\operatorname{dist}(y,U) \leq |y - u| \leq \sup_{c \in F} |c|.$$

Da dies für alle y aus $ZK(x, \complement U)$ zutrifft, folgt

$$|ZK(x, \complement U)| \leq 2 \sup_{c \in F} |c|.$$

Insbesondere ist L endlich, also (a) $\Longrightarrow$ (b) verifiziert.
Ist andrerseits (b) wahr, ist U eine offene symmetrische Umgebung der 0 bezüglich $\mathfrak{T}$ mit $U+U \neq \mathbb{R}$ und definiert man dazu L wie für die Richtung (a) $\Longrightarrow$ (b), so ist jetzt L endlich nach Voraussetzung. Setzt man

$$a := |ZK(0, U+U)|,$$

so gilt für jedes x aus U nach Lemma 3.8

$$|ZK(x,U)| \leq a.$$

Da L endlich ist, kann man in U eine unbeschränkte, positive, monoton wachsende Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wählen derart, daß $x_1 \leq L+2a$ und daß für alle n aus $\mathbb{N}$

$$x_{n+1} - x_n \leq L+2a$$

ist. Sei nun ε aus $\mathbb{R}$ mit $0 < \varepsilon \leq 1$ so, daß $]-\varepsilon, \varepsilon[$ Teilmenge von $ZK(0,U)$ ist. Da durch

$$x_0 := 0 \text{ und}$$

$$x_{-n} := -x_n \text{ für } n \text{ aus } \mathbb{N}$$

ebenfalls Elemente von U bestimmt sind, gilt

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (x_n +]-\varepsilon, \varepsilon[) \subset U+U.$$

Sei K die kleinste natürliche Zahl, die größer als $\frac{L+2a}{\varepsilon}$ ist und sei

$$c_k := k.\varepsilon \text{ für } k = 0, .., K.$$

Dann gilt

$$[0, L+2a[\quad \subset \quad \bigcup_{k=0}^{K} (c_k +]-\varepsilon, \varepsilon[).$$

Aus $[x_n, x_{n+1}[\subset x_n + [0, L+2a[$ und dem Vorausgegangenen folgt:

$$\mathbb{R} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} [x_n, x_{n+1}[\subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (x_n + [0, L+2a[)$$

$$\subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (x_n + \bigcup_{k=0}^{K} (c_k +]-\varepsilon, \varepsilon[))$$

$$= \bigcup_{k=0}^{K} (c_k + \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (x_n +]-\varepsilon, \varepsilon[))$$

$$\subset \bigcup_{k=0}^{K} (c_k + (U+U)).$$

Dadurch ist die Präkompaktheit von $\mathcal{T}$ nachgewiesen. ./.

Das Analogon für $\mathbb{Z}$ lautet

3.10 Satz. Sei $\mathcal{T}$ eine Gruppentopologie auf $\mathbb{Z}$, die echt gröber als $\mathcal{S}_o$ ist. Dann sind äquivalent:

(a) $\mathcal{T}$ ist präkompakt.

(b) Für jede offene symmetrische Umgebung U der 0 bezüglich $\mathcal{T}$ mit $U+U \neq \mathbb{Z}$ gilt

$$\sup \{ \operatorname{dist}(x, U) \mid x \in [U] \} < \infty .$$

Beweis. Man nimmt den Beweis von Satz 3.9 als Vorlage und vereinfacht ihn entsprechend. ./.

Wir kommen zu den angekündigten Beispielen nicht-präkompakter (also notwendig separierter) nicht-diskreter Gruppentopologien auf $\mathbb{Z}$.

3.11 Definition. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen hat die Eigenschaft (D), wenn durch

$$(a_{n+1} - 2 \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1} a_i)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine monoton wachsende, positive, unbeschränkte Folge gegeben ist.

3.12 Bemerkung. Beispiele für Folgen, die die Eigenschaft (D) haben, sind unter anderem die durch

$$a_1 := 1 \text{ und}$$

$$a_{n+1} := n+2\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}a_i$$

induktiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und alle Folgen $(p^{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen p eine feste natürliche Zahl größer oder gleich 2 ist (es ist $p^{2^{n+1}} - \sum_{i=1}^{n} 2^i p^{2^i} \geq p^{2^n}(p^{2^n} - n2^n)$). Offenbar haben auch alle Teilfolgen einer Folge mit der Eigenschaft (D) selbst die Eigenschaft (D).

3.13 Satz (nach einer Idee von W. Roelcke). Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit der Eigenschaft (D). Dann ist durch das System von Mengen

$$U_k := \left\{ \sum_{i\geq k} r_i a_i \;\middle|\; (r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in Z^{(\mathbb{N})}, |r_i| \leq 2^{i-k} \right\} \quad (k\in\mathbb{N})$$

eine 0-Umgebungsbasis einer nicht-präkompakten nicht-diskreten Gruppentopologie auf $\mathbb{Z}$ gegeben.

Beweis. Man überblickt unmittelbar, daß für jedes k aus $\mathbb{N}$ die Menge $U_{k+1} + U_{k+1}$ Teilmenge von U_k ist. Da die U_k symmetrisch sind, beinhaltet dies schon, daß $\{U_k \mid k\in\mathbb{N}\}$ Basis des Umgebungsfilters einer Gruppentopologie auf $\mathbb{Z}$ ist. Definiert man sich für alle n aus $\mathbb{N}$

$$u_n := \sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}a_i \quad \text{und}$$

$$v_n := a_{n+1} - u_n,$$

so genügt es angesichts von Satz 3.10 und der Tatsache, daß die Differenzen

$$v_n - u_n = a_{n+1} - 2\sum_{i=1}^{n} 2^{i-1}a_i$$

für $n \to \infty$ unbeschränkt wachsen, zu zeigen: für n aus $\mathbb{N}$ liegen im Intervall $]u_n, v_n[$ keine Elemente von U_1. Ist dazu

$$x = \sum_{i=1}^{m} r_i\, a_i \quad (m \in \mathbb{N},\ r_i \in \mathbb{Z},\ |r_i| \leq 2^{i-1},\ r_m \neq 0)$$

aus U_1 größer als u_n $(n \in \mathbb{N})$, so liefern einfache Abschätzungen, daß $m > n$ und $r_m > 0$ sein müssen. Da die Folge $(v_m)_{m \in \mathbb{N}}$ offenbar monoton wächst, folgt

$$x = r_m\, a_m + \sum_{i=1}^{m-1} r_i\, a_i \geq a_m - u_{m-1} = v_{m-1} \geq v_n. \quad ./.$$

Den p-adischen Topologien auf $\mathbb{Z}$ kommt ein besonderes Interesse zu. Wir halten deshalb fest:

3.14 Satz. Sei p aus $\mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Dann liegen zwischen der diskreten und der p-adischen Topologie auf $\mathbb{Z}$ abzählbar unendlich viele nicht-präkompakte vergleichbare Gruppentopologien.

Beweis. Man wählt in der Folge $(p^{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ geeignete Teilfolgen aus und betrachtet die dazu gemäß Satz 3.13 definierbaren Gruppentopologien.

Zuerst ein allgemeiner Zusammenhang: Sei $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge natürlicher Zahlen mit $m_n \geq n$ (n aus $\mathbb{N}$) derart, daß der zu $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehörige Elementarfilter echt feiner ist als derjenige, der zur Folge $(n)_{n \in \mathbb{N}}$ gehört. Dann ist die durch die Folge $(a_{m_n})_{n \in \mathbb{N}}$ gemäß Satz 3.13 definierte Gruppentopologie auf $\mathbb{Z}$ echt feiner als die, die durch $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ selbst definiert ist.

Beweis: Erklärt man sich für k aus $\mathbb{N}$ die Umgebungen U_k wie in Satz 3.13 und V_{m_k} durch

$$V_{m_k} := \left\{ \sum_{i \geq k} r_i\, a_{m_i} \;\middle|\; (r_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})},\ |r_i| \leq 2^{i-k} \right\},$$

so gilt offenbar $U_k \supset V_{m_k}$ und es genügt, sich $U_k \not\subset V_{m_1}$ klarzumachen. Ist r_i aus $\mathbb{Z}$ mit $|r_i| \leq 2^{i-1}$ $(i = 1, .., i_o;\ i_o \in \mathbb{N})$ und $\sum_{i=1}^{i_o} r_i\, a_i = 0$, so folgt $r_i = 0$ für alle $i = 1, .., i_o$, denn die Annahme, daß etwa $r_{i_o} \neq 0$ ist, wird durch die Abschätzung

$$|r_{i_o}\, a_{i_o}| \geq a_{i_o} > \sum_{i=1}^{i_o-1} 2^{i-1} a_i \geq \left|\sum_{i=1}^{i_o-1} r_i\, a_i\right|$$

widerlegt. Somit gilt für alle n aus $\mathbb{N}\setminus\{m_1, m_2, ..\}$ und für alle i_o aus $\mathbb{N}$ und r_i aus $\mathbb{Z}$ mit $|r_i| \leq 2^{i-1}$ $(i=1,.., i_o)$:

$$a_n \neq \sum_{i=1}^{i_o} r_i\, a_{m_i} .$$

Es folgt $U_k \not\subset V_{m_1}$ $(k\in\mathbb{N})$.

Für l,n aus $\mathbb{N}$ sei

$$b_n(l) := p^{2^{n2^l}} .$$

Der allgemeine Zusammenhang garantiert nun, daß die für l aus $\mathbb{N}$ durch die Folge $(b_n(1))_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß Satz 3.13 definierten nicht-präkompakten Gruppentopologien $\mathcal{T}_l$ den Beziehungen $\mathcal{T}_l \subsetneq \mathcal{T}_{l+1}$ genügen.
Da für jedes k aus $\mathbb{N}$ die Inklusion

$$\left\{\sum_{i\geq k} r_i\, b_i(1) \;\middle|\; (r_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}, |r_i| \leq 2^{i-k}\right\} \subset p^{2^{2k}}.\mathbb{Z}$$

gilt, ist $\mathcal{T}_1$ feiner als die p-adische Topologie auf $\mathbb{Z}$. ./.

Abschließend beschreiben wir, wie man mit jeder nicht-präkompakten nicht-diskreten Gruppentopologie auf $\mathbb{Z}$ eine nicht-präkompakte Gruppentopologie auf $\mathbb{R}$, die echt gröber als $\mathcal{T}_e$ ist, assoziieren kann.

3.15 Sei $(X, \mathcal{T})$ eine abelsche topologische Gruppe und sei G eine Untergruppe von X. Sei $\mathcal{R}$ eine Gruppentopologie auf G mit $\mathcal{R} \subset \mathcal{T}|G$ und sei $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ die Gruppentopologie auf X, für die

$$\{U+V \mid U\in\mathcal{U}_e(\mathcal{R}),\ V\in\mathcal{U}_e(\mathcal{T})\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ ist. Dann gilt

$$(*)\quad \mathcal{T}_{\mathcal{R}}|G = \mathcal{R} .$$

Beweis. Sei U aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{R})$ und sei U_1 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ so, daß $U_1+U_1 \subset U$ ist. Es gibt ein V aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ so, daß $V\cap G \subset U_1$ ist. Wegen $U_1 \subset G$ folgt

$$(U_1+V)\cap G \subset U_1+(V\cap G) \subset U_1+U_1 \subset U. \quad ./.$$

Seien $(X,\mathcal{T})$ und G wie in 3.15 und sei f die Abbildung $\mathcal{R} \longmapsto \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ von der Menge der Gruppentopologien auf G, die gröber als $\mathcal{T}|G$ sind, in die Menge der Gruppentopologien auf X, die gröber als $\mathcal{T}$ sind. Dann folgt aus (*):
- f ist injektiv und
- $f(\mathcal{R}) = \mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ ist nicht präkompakt, wenn $\mathcal{R}$ nicht präkompakt ist.
Offenbar ist f auch ordnungstreu (bezüglich "$\subset$"). Damit erhalten wir aus Satz 3.14:

3.16 Folgerung. Sei p aus $\mathbb{N}$ mit $p \geq 2$. Sei $\mathcal{T}$ die Gruppentopologie auf $\mathbb{R}$, für die

$$\{p^n\mathbb{Z}+]-\varepsilon,\varepsilon[\,|\,n\in\mathbb{N},\ \varepsilon>0\}$$

eine Basis von $\mathcal{U}_0(\mathcal{T})$ ist. Dann gibt es zwischen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}_0$ abzählbar unendlich viele nicht-präkompakte vergleichbare Gruppentopologien.

3.17 Bemerkung (W. Roelcke). Es gibt sogar überabzählbar viele vergleichbare nicht-präkompakte (separierte) Gruppentopologien oberhalb einer p-adischen Topologie auf $\mathbb{Z}$ (p aus $\mathbb{N}$, $p \geq 2$), also auch überabzählbar viele nicht-präkompakte Gruppentopologien auf $\mathbb{R}$ zwischen $\mathcal{T}$ (in 3.16) und $\mathcal{T}_0$ (transfinite Induktion; bei Limesschritt Diagonalfolgenbildung).

§ 4 Allgemeine lineare Gruppen und eine Vergröberungsmethode

Mit der gleichen Überlegung, mit der man die Vererbbarkeit der Minimalität auf abgeschlossene Untergruppen bei abelschen Gruppen beweist, zeigen wir, daß das Zentrum einer minimalen Gruppe minimal ist. Daraus ergibt sich dann, daß die Gruppe der topologischen Vektorraum-Automorphismen eines normierten Raumes über einem unendlichen separierten topologischen Körper mit lokalkompakter Körpervervollständigung nicht minimal ist, wenn man sie mit der mit ihrer Gruppenstruktur verträglichen Topologie der beschränkten Konvergenz versieht.
Danach erhalten wir durch eine Analyse der Vergröberungsmethode, die beim Beweis der Aussage über das Zentrum verwendet wurde einerseits eine Charakterisierung der Minimalität einer separierten Gruppentopologie $\mathfrak{T}$ in Abhängigkeit von den mit $\mathfrak{T}$ "verträglichen" Gruppentopologien und andrerseits eine "kanonische Darstellung" der Vergröberungsmethode aus [25].

4.1 Satz. Das Zentrum und alle darin enthaltenen abgeschlossenen Untergruppen einer minimalen (bzw. q-minimalen) Gruppe sind minimal (bzw. q-minimal).

Beweis. Wir setzen die Vererbbarkeit der Minimalität (bzw. q-Minimalität) auf abgeschlossene Untergruppen im abelschen Fall als bekannt voraus ([21], 2.3, 3.1) und haben deshalb nur zu zeigen, daß das Zentrum einer minimalen (bzw. q-minimalen) Gruppe minimal (bzw. q-minimal) ist. Der minimale Fall:
Sei $(X,\mathfrak{T})$ eine minimale Gruppe und sei Z das Zentrum von X. Angenommen, es gibt eine separierte Gruppentopologie $\mathfrak{T}$ auf Z, die echt gröber als $\mathfrak{T}|Z$ ist. Offenbar ist

$$\{UV \mid U \in \mathcal{U}_e(X,\mathfrak{T}), V \in \mathcal{U}_e(Z,\mathfrak{T})\}$$

e-Umgebungsbasis einer Gruppentopologie $\mathfrak{R}$ auf X, die wegen

$$\bigsqcap_{V \in \mathcal{U}_e(Z,\mathfrak{T})} \bigsqcap_{U \in \mathcal{U}_e(X,\mathfrak{T})} UV = \bigsqcap_{V \in \mathcal{U}_e(Z,\mathfrak{T})} \overline{V}^{\mathfrak{T}}$$

$$= \bigsqcap_{V \in \mathcal{U}_e(Z,\mathfrak{T})} \overline{V}^{\mathfrak{T}|Z} \subset \bigsqcap_{V \in \mathcal{U}_e(Z,\mathfrak{T})} \overline{V}^{\mathfrak{T}} = \{e\}$$

separiert ist. Es gibt eine Umgebung U_o von e bezüglich $\mathcal{T}$ so, daß für jede Umgebung V von e bezüglich $\mathcal{T}$ gilt:

$$V \not\subset U_o \cap Z.$$

Somit gilt für jede Umgebung V von e bezüglich $\mathcal{T}$ und jede Umgebung U von e bezüglich $\mathcal{T}$ die Beziehung

$$UV \not\subset U_o .$$

Also ist $\mathcal{T}$ eine separierte Gruppentopologie auf X, die echt gröber als $\mathcal{T}$ ist. Widerspruch. Den q-minimalen Fall leitet man folgendermaßen aus dem minimalen ab: Sei X eine q-minimale Gruppe, Z ihr Zentrum, N ein abgeschlossener Normalteiler von Z - also auch von X -, und sei Z_1 das Zentrum von X/N. Da $\left(X/N\right)/\left(Z/N\right)$ separiert ist, ist Z/N abgeschlossen in X/N. Insbesondere ist Z/N abgeschlossene Untergruppe der minimalen abelschen Gruppe Z_1, also selbst minimal. ./.

4.2 Folgerung. Das Zentrum einer lokalkompakten minimalen Gruppe ist kompakt (als lokalkompakte minimale abelsche Gruppe).

4.3 Folgerung. Sei $(X,\mathcal{T})$ eine separierte Gruppe und sei Z das Zentrum von X. Gibt es auf Z keine minimale Gruppentopologie, die gröber als $\mathcal{T}|Z$ ist, so gibt es auch auf X keine minimale Gruppentopologie, die gröber als $\mathcal{T}$ ist.

4.4 Folgerung. Sei K ein separierter topologischer Körper, dessen multiplikative Gruppe K^* (aufgefaßt als separierte Gruppe) nicht minimal ist. Sei E ein Vektorraum über K und X eine Untergruppe der allgemeinen linearen Gruppe GL(E) von E. Es gelte $X \supset K^* \cdot \{id_E\}$ und es sei X mit einer separierten Gruppentopologie versehen, die auf $K^* \cdot \{id_E\}$ die von K^* herrührende Topologie induziert. Dann ist X nicht minimal, wenn eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:

(a) $K^* \cdot \{id_E\}$ ist abgeschlossen in X.

(b) Die separierte Gruppenvervollständigung von K^* ist nicht minimal.

Beweis. Offenbar ist $K^* \cdot \{id_E\}$ Teilmenge des Zentrums Z von X. Damit ist (a) klar. Nimmt man im Fall (b) an, daß X und folglich Z minimal sind, so sind auch die Vervollständigungen $\widetilde{Z}$ und $\widetilde{K^*}$ minimal (letztere, da sie als abgeschlossene Untergruppe von $\widetilde{Z}$ aufgefaßt werden kann). Widerspruch. ./.

In der Situation von 4.4 ist $K^* \cdot \{id_E\}$ im allgemeinen nicht abgeschlossen in X, wie schon das Beispiel $K = \mathbb{Q}$, $E = \mathbb{R}$ und $X = \mathbb{R}^*$ zeigt.

Unmittelbar klar ist nun, daß die mit den Standardtopologien versehenen Gruppen $GL(n,K)$ für $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ($n \in \mathbb{N}$) nicht minimal sind. Wir wollen noch weitere Anwendungsmöglichkeiten von 4.4 betrachten.

4.5 Beispiele (für K). Sei K ein unendlicher separierter topologischer Körper, der eine lokalkompakte Körpervervollständigung besitzt (vgl. [4], Ch. III, § 6.8). Dann sind K und K^* nicht minimal.

Beweis. Sei $\hat{K}$ die lokalkompakte Körpervervollständigung von K. Da $\hat{K}^* = \complement_{\hat{K}}\{0\}$ offen in $\hat{K}$ ist, ist $K^* = K \cap \complement_{\hat{K}}\{0\}$ dicht in $\hat{K}^*$. Nach [4], Ch. III, § 6.8, Proposition 8, ist $\hat{K}^*$ vollständig bezüglich seiner multiplikativen Uniformität. Also kann $\hat{K}^*$ als Gruppenvervollständigung von K^* aufgefaßt werden, so daß diese insbesondere auch lokalkompakt ist. Nimmt man nun an, daß K bzw. K^* minimal sind, so sind $\hat{K}$ bzw. $\hat{K}^*$ als lokalkompakte minimale abelsche Gruppen kompakt. Wegen $\hat{K} = \hat{K}^* \cup \{0\}$ ist $\hat{K}$ in beiden Fällen ein kompakter Körper, also endlich (vgl. [4], Ch. III, § 6, ex. 13 oder [16], p.45). Widerspruch. ./.

4.6 Beispiele (für E und X). Sei K ein nicht-diskreter (also unendlicher) bewerteter Körper (im Sinne von [5], Ch. IX, § 3.2) und sei $\hat{K}$ seine Körpervervollständigung (vgl. loc. cit.). Sei E ein nicht-trivialer normierter Raum

über K. Nach [5], Ch. IX, § 3.3, Proposition 8 kann die Gruppenvervollständigung $\hat{E}$ der additiven Gruppe von E als normierter Raum über $\hat{K}$ aufgefaßt werden. Wir versehen die $\hat{K}$-Algebra $\mathcal{L}(\hat{E})$ der stetigen Vektorraum-Endomorphismen von $\hat{E}$ mit der Topologie der beschränkten Konvergenz, welche nach [5], Ch. X, § 3.2, verträglich ist mit der sup-Norm

$$\|f\| = \sup_{x \in \hat{E} \setminus \{0\}} \frac{\|f(x)\|}{\|x\|}$$

auf $\mathcal{L}(\hat{E})$. Da nach [5], Ch. X, § 3.2, Proposition 5 und 8, $\mathcal{L}(\hat{E})$ eine vollständige normierte Algebra ist, gilt, nun aufgrund von [5], Ch. IX, § 3.7, Proposition 13, daß die Gruppe $GL_{top}(\hat{E})$ der topologischen Vektorraum-Automorphismen von $\hat{E}$, versehen mit der Topologie der beschränkten Konvergenz, eine separierte (vollständige) Gruppe ist.

Vermöge des normerhaltenden Homomorphismus $f \longmapsto \hat{f}$ von der Gruppe $GL_{top}(E)$ der topologischen Vektorraum-Automorphismen von E - gleichfalls versehen mit der von der sup-Norm induzierten Topologie - in die Gruppe $GL_{top}(\hat{E})$, bei dem jedem f aus $GL_{top}(E)$ seine stetige Fortsetzung $\hat{f}$ zugeordnet wird, kann $GL_{top}(E)$ als topologische Untergruppe von $GL_{top}(\hat{E})$ aufgefaßt werden, ist also insbesondere selbst eine separierte Gruppe.

Auf $K^* \cdot \{id_E\}$ ist die von der Normtopologie induzierte Topologie gleich derjenigen, die von der (metrischen) Körpertopologie induziert wird. Wir können daher folgern:

(a) Ist $\hat{K}$ lokalkompakt, so ist $GL_{top}(E)$ nicht minimal.

(b) Falls das Zentrum von $GL_{top}(E)$ gleich $K^* \cdot \{id_E\}$ ist, gilt:
Gibt es auf K^* keine minimale Gruppentopologie, die gröber als die relativierte Körpertopologie ist, so gibt es auch auf $GL_{top}(E)$ keine minimale Gruppentopologie, die gröber als die Topologie der beschränkten Konvergenz ist.

Hier schließt sich die offene Frage an, ob es auf $\mathbb{R}^*$ eine minimale Gruppentopologie gibt, die gröber als die Standardtopologie ist, oder anders gesagt, ob es auf $\mathbb{R} \times \{-1,1\}$ eine minimale Gruppentopologie gibt, die gröber ist als die Produkttopologie bezüglich der Standardtopologie und der diskreten Topologie.

Aus der Isomorphie $\mathbb{R}_+^* \cong \mathbb{R}$ ergibt sich immerhin sofort folgendes Kuriosum:
Auf der Gruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & z \end{pmatrix} \middle| \, z > 0,\ y > 0,\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

gibt es keine minimale Gruppentopologie, die gröber als die Standardtopologie ist (wegen Folgerung 4.3). Mit der Standardtopologie versehen enthält sie

$$\left\{ \begin{pmatrix} y & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, y > 0,\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

als abgeschlossenen, nach § 2 minimalen Normalteiler, welcher seinerseits in

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{R} \right\}$$

einen abgeschlossenen Normalteiler mit "nicht-minimalisierbarer" Relativtopologie besitzt.

Ergänzend zu der Feststellung vor 4.5 sei erwähnt, daß die diskreten Gruppen $GL(n,\mathbb{Z})$ und $SL(n,\mathbb{Z})$ nicht minimal sind ($n \geq 2$). Auf $GL(n,\mathbb{Z})$ bzw. $SL(n,\mathbb{Z})$ ist nämlich die Relativtopologie bezüglich einer p-adischen Topologie auf $\mathbb{Z}^{n^2}$ ($p \geq 2$) eine separierte nicht-diskrete Gruppentopologie, wie man aus der nachstehenden Behauptung ersehen kann.

4.8 Behauptung. Sei R ein Ring mit 1, versehen mit einer Ringtopologie, die eine 0-Umgebungsbasis $\mathfrak{B}$ aus zweiseitigen Idealen besitzt. Dann induziert die Produkttopologie auf R^{n^2} (n aus $\mathbb{N}$) eine Gruppentopologie auf $GL(n,R)$.
Bezeichnet I das neutrale Element von $GL(n,R)$, so ist durch die Mengen

$$N(U) := (I + U^{n^2}) \cap GL(n,R) \qquad (U \in \mathfrak{B})$$

eine Basis des Umgebungsfilters von I bezüglich dieser Gruppentopologie gegeben.

Beweis. Wegen

$$N(U_1) \cap N(U_2) \supset N(U_1 \cap U_2)$$

für U_1 und U_2 aus $\mathfrak{B}$, ist

$$\{ N(U) \mid U \in \mathfrak{B} \}$$

eine Filterbasis.

Man verifiziert nun, daß für jedes U aus $\mathfrak{U}$ durch N(U) ein Normalteiler von GL(n,R) erklärt ist:
Sei U aus $\mathfrak{U}$ und seien α_{ij}, β_{ij} aus U für $i,j = 1,..,n$ so, daß $A := (\delta_{ij} + \alpha_{ij})_{i,j}$ und $B := (\delta_{ij} + \beta_{ij})_{i,j}$ aus N(U) sind (δ_{ij} bezeichne das Kronecker-Symbol).

Für $C := AB$, $C = (c_{ik})_{i,k}$, und für $i,k = 1,..,n$ gilt:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} (\delta_{ij} + \alpha_{ij})(\delta_{jk} + \beta_{jk})$$

$$= \delta_{ik} + \beta_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}(\delta_{jk} + \beta_{jk}).$$

Also ist AB aus N(U).
Für $C := A^{-1}$, $C = (c_{ik})_{i,k}$, und für $i,k = 1,..,n$ gilt (wegen $(\delta_{ik})_{i,k} = AC$):

$$\delta_{ik} = c_{ik} + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_{jk},$$

so daß folgt, daß auch A^{-1} aus N(U) ist.
Sei jetzt $B = (b_{ij})_{i,j}$ im Gegensatz zu oben ein beliebiges Element aus GL(n,R) (A wie oben). Für $B' := B^{-1}$, $B' = (b'_{kl})_{k,l}$, $C := BAB'$, $C = (c_{il})_{i,l}$, und für $i,l = 1,..,n$ gilt:

$$c_{il} = \sum_{k=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(\delta_{jk} + \alpha_{jk}) \Big) b'_{kl}$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} b_{ij} \alpha_{jk} b'_{kl} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} b'_{kl}.$$

Aus $$\sum_{k=1}^{n} b_{ik} b'_{kl} = \delta_{il}$$

erhält man, daß schließlich auch BAB^{-1} aus N(U) ist. ./.

Wir fragen nunmehr nach übergeordneten Gesichtspunkten der im Beweis von Satz 4.1 angewandten Vergröberungstechnik.

4.9 Definition. Seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ zwei Gruppentopologien auf einer Gruppe. Dann heißen $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}'$ verträglich, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

für jedes U aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ und jedes V aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ gibt es ein U_1 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ und ein V_1 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ mit $V_1U_1 \subset UV$.

Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ verträglich, so sagen wir auch, daß $\mathcal{T}$ mit $\mathcal{T}$ verträglich ist.

4.10 Beispiele (für verträgliche Gruppentopologien). Seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ zwei Gruppentopologien auf einer Gruppe. Ist $\mathcal{T}$ oder $\mathcal{T}$ eine SIN-Gruppentopologie, so sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ verträglich. Sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ vergleichbar, so sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ verträglich.

Verträgliche Gruppentopologien lassen sich folgendermaßen charakterisieren:

4.11 Lemma (S. Dierolf, W. Roelcke). Seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ zwei Gruppentopologien auf einer Gruppe X und sei $\mathcal{B}$ die Basis

$$\mathcal{B} := \{UV \mid U \in \mathcal{U}_e(\mathcal{T}),\ V \in \mathcal{U}_e(\mathcal{T})\}$$

des Bildes $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}).\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ von $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}) \times \mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ bezüglich der Multiplikationsabbildung. Dann sind äquivalent:

(a) Die Gruppentopologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ sind verträglich.

(b) Es gibt eine Gruppentopologie $\mathcal{R}$ auf X so, daß $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{U}_e(\mathcal{R})$ ist.

(c) Die Filterbasis $\mathcal{B}$ ist Basis des e-Umgebungsfilters von $\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}$. (Dabei bezeichnet $\mathcal{T} \wedge \mathcal{T}$ das Infimum von $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$, d.h., die feinste Gruppentopologie auf X, die gröber als $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ ist.)

Beweis. Für (b) $\Rightarrow$ (a) seien U aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ und V aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$. Nach Voraussetzung gibt es ein symmetrisches W aus $\mathcal{B}$ mit $W \subset UV$. Zu W gibt es symmetrische Umgebungen U_1 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ und V_1 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ mit $U_1V_1 \subset W$. Es folgt

$$V_1U_1 = V_1^{-1}U_1^{-1} = (U_1V_1)^{-1} \subset UV.$$

Die weiteren Implikationen sind ähnlich direkt zu verifizieren.

./.

Der Abgrenzung dienen 4.12 und 4.13.

4.12 Beispiele (für nicht-verträgliche Gruppentopologien). Seien $(G,\mathcal{T}_1)$ eine nicht-triviale topologische Gruppe und H eine nicht-triviale Untergruppe der Gruppe der topologischen Automorphismen von $(G,\mathcal{T}_1)$. Sei η die Einbettung von H in die Automorphismengruppe von G. Bezeichnet ϑ_H die diskrete Topologie auf H, so ist $(G,\mathcal{T}_1) \underset{\eta}{\times} (H,\vartheta_H)$ ein topologisches semi-direktes Produkt, also $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \times \vartheta_H$ eine Gruppentopologie auf $G \underset{\eta}{\times} H$. Bezeichnet ϑ_G die diskrete Topologie auf G und ist $\mathcal{T}_2$ eine Gruppentopologie auf H derart, daß die Abbildung

$$(H,\mathcal{T}_2) \times (G,\vartheta_G) \longrightarrow (G,\vartheta_G),\ (y,x) \longmapsto y(x),\ \text{stetig},$$

aber die Abbildung

(*) $\quad (H,\mathcal{T}_2) \times (G,\mathcal{T}_1) \longrightarrow (G,\mathcal{T}_1),\ (y,x) \longmapsto y(x),\ \text{unstetig}$

ist, so ist erstens klar, daß $\mathcal{T} := \vartheta_G \times \mathcal{T}_2$ eine Gruppentopologie auf $G \underset{\eta}{\times} H$ ist. Zweitens aber gilt: $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ sind nicht verträglich. Nimmt man nämlich an, daß sie verträglich sind, so folgt aus 4.11, daß

$$\{(U \times \{e\})(\{e\} \times V) \mid U \in \mathcal{U}_e(G,\mathcal{T}_1), V \in \mathcal{U}_e(H,\mathcal{T}_2)\}$$

e-Umgebungsbasis einer Gruppentopologie auf $G \underset{\eta}{\times} H$ ist. Jedoch folgt aus (*), daß die Produkttopologie $\mathcal{T}_1 \times \mathcal{T}_2$ keine Gruppentopologie auf $G \underset{\eta}{\times} H$ ist. Widerspruch.

4.13 Um die Situation in 4.12 zu realisieren, sei K eine nicht-triviale abelsche Gruppe und I eine unendliche Indexmenge. Wir setzen:

$$G := K^{(I)} \quad \text{und}$$

$$\mathcal{T}_1 := (\vartheta_K)^I \mid G,$$

wobei $(\vartheta_K)^I$ die Produkttopologie auf K^I bezüglich der diskreten Topologie ϑ_K auf K bezeichne.
Sei nun H die Gruppe der topologischen Automorphismen von $(G,\mathcal{T}_1)$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz bezüglich der diskreten Uniformität auf G. Diese Topologie, die mit $\mathcal{T}_2$ bezeichnet werde, ist eine separierte Gruppentopologie auf H mit der Eigenschaft, daß die Abbildung

$$(H,\mathcal{T}_2) \times (G,\vartheta_G) \longrightarrow (G,\vartheta_G),\ (y,x) \longmapsto y(x)$$

stetig ist, wie man leicht verifiziert.

4.14 Behauptung. Für die in 4.13 beschriebenen separierten Gruppen $(G,\mathcal{T}_1)$ und $(H,\mathcal{T}_2)$ ist die Abbildung

$$\varphi : (H,\mathcal{T}_2) \times (G,\mathcal{T}_1) \longrightarrow (G,\mathcal{T}_1),\ (y,x) \longmapsto y(x)$$

unstetig im Punkt $(id,(0)_{\iota\in I})$ aus $H \times G$.

Beweis. Für $J \subset I$ bzw. $F \subset G$ sei

$$U_J := \{ (x_\iota)_{\iota\in I} \in G \mid \text{für alle } \iota\in J \text{ ist } x_\iota = 0 \} \text{ bzw.}$$

$$V_F := \{ y\in H \mid \text{für alle } x\in F \text{ ist } y(x) = x \}.$$

Wir beziehen uns jetzt auf ein festes κ aus I und setzen $U := U_{\{\kappa\}}$. Angenommen, es existieren endliche Teilmengen F von G und J von I so, daß $\varphi(V_F \times U_J) \subset U$ ist. Dann ist auch

$$J_o := J \cup \{\kappa\} \cup \{\iota\in I \mid \text{es gibt ein } x\in F \text{ mit } pr_\iota(x) \neq 0\}$$

endlich und wegen $U_{J_o} \subset U_J$ gilt $\varphi(V_F \times U_{J_o}) \subset U$.

Sei λ aus $I \setminus J_o$ und sei f der durch

$$f : K^{(I)} \longrightarrow K^{(I)}$$

$$x = (x_\iota)_{\iota\in I} \longmapsto f(x) \text{ mit}$$

$$f(x)_\kappa := x_\kappa + x_\lambda$$

$$f(x)_\iota := x_\iota \text{ für alle } \iota \neq \kappa$$

erklärte topologische Automorphismus von $(G,\mathcal{T}_1)$. Wir wählen ein a aus $K \setminus \{0\}$ und definieren $z_\lambda := a$ und $z_\iota := 0$ für alle $\iota \neq \lambda$. Da $z := (z_\iota)_{\iota\in I}$ aus U_{J_o} und f aus V_F ist, folgt: $f(z)$ ist aus U, also $f(z)_\kappa = 0$. Dies steht im Widerspruch zu

$$f(z)_\kappa = z_\kappa + z_\lambda = 0 + a \neq 0. \quad ./.$$

Ist K in 4.13 eine endliche nicht-triviale abelsche Gruppe und I abzählbar, so sind $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ metrisierbar, also auch die entsprechenden Topologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ in 4.12.

Wir knüpfen nun direkt an den Beweis von Satz 4.1 an. Dort hatten wir eine Gruppentopologie auf dem Zentrum der Gruppe X betrachtet. Der e-Umgebungsfilter dieser Gruppentopologie konnte gleichzeitig als e-Umgebungsfilter einer Gruppentopologie auf ganz X aufgefaßt werden, welche mit jeder anderen Gruppentopologie auf X verträglich war. Im weiteren Verlauf des Beweises wurde dann (implizit) ausgenutzt, daß man für zwei verträgliche separierte Gruppentopologien leicht beurteilen kann, ob ihr Infimum separiert ist.
Dies führt uns zur Beschreibung einer übergeordneten Situation, bei der die Abgeschlossenheit des Zentrums einer separierten Gruppe durch eine geeignete Nebenbedingung simuliert wird. Dabei betrachten wir auch die Relativtopologien auf den Untergruppen der gegebenen Gruppe.

4.15 Lemma. Sei X eine Gruppe und sei Y eine Untergruppe von X. Seien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ Gruppentopologien auf X derart, daß $\mathcal{U}_e(\mathcal{S})$ eine Basis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen besitzt. Dann gelten die Implikationen:
(a) Ist $\mathcal{T}|Y$ separiert, so ist auch $\mathcal{T}|Y$ separiert.
(b) Ist $\mathcal{T}|Y$ separiert und sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ verträglich, so ist auch $(\mathcal{T}\wedge\mathcal{S})|Y$ separiert.

Beweis. Ohne die Separiertheit von $\mathcal{T}|Y$ gilt in der Ausgangssituation:

$$\overline{\{e\}}^{\mathcal{T}|Y} = Y\cap\bigcap_{U\in\mathcal{U}_e(\mathcal{T})} U \subset Y\cap\bigcap_{U\in\mathcal{U}_e(\mathcal{T})}\Big(U\bigcap_{V\in\mathcal{U}_e(\mathcal{S})} V\Big)$$

$$\subset Y\cap\bigcap_{U\in\mathcal{U}_e(\mathcal{T})}\ \bigcap_{V\in\mathcal{U}_e(\mathcal{S})} UV$$

$$= Y\cap\bigcap_{V\in\mathcal{U}_e(\mathcal{S})}\overline{V}^{\mathcal{T}} = Y\cap\bigcap_{V\in\mathcal{U}_e(\mathcal{S})} V = \overline{\{e\}}^{\mathcal{T}|Y}.$$

Damit ist (a) klar. Sind in der Ausgangssituation zusätzlich $\mathcal{T}$ und $\mathcal{S}$ verträglich, so ergibt sich unter Berücksichtigung von 4.11 entsprechend

$$\overline{\{e\}}^{(\mathcal{T}\wedge\mathcal{S})|Y} = Y\cap\bigcap_{U\in\mathcal{U}_e(\mathcal{T})}\ \bigcap_{V\in\mathcal{U}_e(\mathcal{S})} UV = \overline{\{e\}}^{\mathcal{T}|Y}.$$

Damit ist auch (b) klar. ./.

4.16 Lemma. Sei $(X,\mathfrak{T})$ eine topologische Gruppe und sei Y eine dichte Untergruppe von $(X,\mathfrak{T})$. Sei $\mathfrak{T}'$ eine Gruppentopologie auf X, die nicht feiner als $\mathfrak{T}$ ist. Dann ist $(\mathfrak{T}\wedge\mathfrak{T}')|Y$ echt gröber als $\mathfrak{T}|Y$.

Beweis. Mit Hilfe von Lemma 1.13 (b) widerlegt man das Gegenteil. ./.

Aus 4.15 und 4.16 erhält man die zu Beginn des Paragraphen erwähnte Charakterisierung. Mit Hilfe des Banaschewski-Kriteriums läßt sich diese auf die Relativtopologien der dichten Untergruppen einer separierten Gruppe ausdehnen und führt so zu folgender Variante dieses Kriteriums:

4.17 Satz. Sei $(X,\mathfrak{T})$ eine separierte Gruppe und sei Y eine dichte Untergruppe von $(X,\mathfrak{T})$. Dann sind äquivalent:

(a) $(Y,\mathfrak{T}|Y)$ ist minimal.

(b) Für jede mit $\mathfrak{T}$ verträgliche Gruppentopologie $\mathfrak{T}'$ auf X, die eine e-Umgebungsbasis aus $\mathfrak{T}$-abgeschlossenen Mengen besitzt und für die $\mathfrak{T}'|Y$ separiert ist, gilt: $\mathfrak{T}'$ ist feiner als $\mathfrak{T}$.

Beweis. Man braucht sich nur noch (b) $\Rightarrow$ (a) zu überlegen. Zunächst folgt aus (b), daß $(X,\mathfrak{T})$ minimal ist. Ist nun N ein abgeschlossener Normalteiler von $(X,\mathfrak{T})$ mit $N\cap Y = \{e\}$, so ist $\{N\}$ e-Umgebungsbasis einer Gruppentopologie $\mathfrak{T}'$ auf X, die - auch aufgrund von (b) - feiner als $\mathfrak{T}$ ist. Es folgt: $N \subset \bigcap_{U\in\mathcal{U}_e(\mathfrak{T})} U = \{e\}$. ./.

4.18 In [25] wird folgende Vergröberungsmethode angegeben: Sei $(X,\mathfrak{T})$ eine separierte Gruppe und sei Y eine dichte Untergruppe von $(X,\mathfrak{T})$. Sei $\mathcal{N}$ eine Filterbasis aus abgeschlossenen Normalteilern von $(X,\mathfrak{T})$ mit den Eigenschaften:

(i) $Y\cap\bigcap_{N\in\mathcal{N}} N = \{e\}$ (Separationseigenschaft),

(ii) Es gibt ein U aus $\mathcal{U}_e(\mathfrak{T})$ so, daß kein N aus $\mathcal{N}$ Teilmenge von U ist (Vergröberungseigenschaft).

Dann ist

$$\mathfrak{V} := \left\{ V \subset Y \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{zu jedem } y \in V \text{ existiert ein } N \in \mathcal{N} \text{ und} \\ U \in \mathfrak{T} \text{ mit } e \in U \text{ und } Y \cap yUN \subset V \end{array} \right\}$$

eine separierte Gruppentopologie auf Y, die echt gröber als $\mathfrak{T}|Y$ ist.

Wir behaupten:

4.19 Seien $(X,\mathfrak{T})$, Y, $\mathcal{N}$ und $\mathfrak{V}$ wie in 4.18. Sei $\mathfrak{T}$ die (SIN-) Gruppentopologie auf X, für die $\mathcal{N}$ eine Basis (aus $\mathfrak{T}$-abgeschlossenen Mengen) von $\mathcal{U}_e(\mathfrak{T})$ ist. Dann gilt:

$$\mathfrak{V} = (\mathfrak{T} \wedge \mathfrak{T})|Y.$$

Anmerkung. Die Aussage von 4.18 ergibt sich aus unserem Konzept dann auf folgende Weise: Wegen (i) ist $\mathfrak{T}|Y$ separiert und wegen (ii) ist $\mathfrak{T}$ nicht feiner als $\mathfrak{T}$. Nach 4.15 und 4.16 ist $(\mathfrak{T} \wedge \mathfrak{T})|Y$ eine separierte Gruppentopologie auf X, die echt gröber als $\mathfrak{T}|Y$ ist.

Beweis von 4.19.
"$\subset$": Sei V eine nicht-leere Menge aus $\mathfrak{V}$. Zu jedem y aus V gibt es ein N_y aus $\mathcal{N}$ und eine bezüglich $\mathfrak{T}$ offene Umgebung U_y von e mit $Y \cap yU_yN_y \subset V$. Aufgrund von 4.11 und der Darstellung

$$V = \bigcup_{y \in V} (Y \cap yU_yN_y)$$

ist V Vereinigung von Mengen, die bezüglich $(\mathfrak{T} \wedge \mathfrak{T})|Y$ offen sind.
"$\supset$": Hierfür vergleicht man die Umgebungsfilter von e. Sei $Y \cap UN$ aus $\mathcal{U}_e((\mathfrak{T} \wedge \mathfrak{T})|Y)$ mit N aus $\mathcal{N}$ und einer Umgebung U von e, die bezüglich $\mathfrak{T}$ offen ist. Setzt man für y aus $Y \cap UN$:

$$U_1 := y^{-1}UN,$$

so ist U_1 eine offene Umgebung von e bezüglich $\mathfrak{T}$ mit

$$Y \cap yU_1N = Y \cap UN.$$

Also ist $Y \cap UN$ aus $\mathcal{U}_e(\mathfrak{V})$. ./.

Man kann sich überlegen, daß die Gruppentopologie $\mathfrak{V} = (\mathfrak{T} \wedge \mathfrak{T})|Y$ in 4.19 auch dadurch charakterisiert ist, daß sie die Initial-

topologie auf Y bezüglich der kanonischen Abbildungen

$$q_N|Y : Y \longrightarrow {}^{(YN,\mathcal{T}|YN)}/_{N} \qquad (N\in\mathcal{N})$$

ist, d.h., daß sie die gröbste Gruppentopologie auf Y ist, die feiner als alle $(\mathcal{T}\wedge\mathcal{T}_N)|Y$ ist (wobei $\mathcal{T}_N$ die Gruppentopologie auf X bezeichne, für die $\{N\}$ eine Basis von $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}_N)$ ist).

Betrachten wir speziell eine minimale Gruppe $(X,\mathcal{T})$, die eine dichte nicht-minimale Untergruppe Y besitzt, und ist N ein abgeschlossener nicht-trivialer Normalteiler von $(X,\mathcal{T})$, der mit Y trivialen Durchschnitt hat, so ist in der Bezeichnungsweise von 4.19 durch $(\mathcal{T}\wedge\mathcal{T})|Y$ eine separierte Gruppentopologie auf Y gegeben, die echt gröber als $\mathcal{T}|Y$ ist. Dieser Sachverhalt liefert insbesondere ein Beispiel dafür, daß die Gruppentopologie $(\mathcal{T}|Y)\wedge(\mathcal{T}|Y)$, die stets feiner als $(\mathcal{T}\wedge\mathcal{T})|Y$ ist, in der Tat echt feiner als diese sein kann.

Wir unterstreichen nun durch zwei Beispiele die Bedeutung der Eigenschaft in 4.15, daß $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ eine Basis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen besitzt.

4.20 Beispiel. Seien p und q Primzahlen mit $p \neq q$ und sei $\mathcal{T}$ die p-adische und $\mathcal{T}$ die q-adische Topologie auf $X := Y := \mathbb{Z}$. Dann sind $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ verträgliche Topologien und $\mathcal{T}\wedge\mathcal{T}$ ist die gröbste Topologie.

Das zweite Beispiel zeigt, daß die genannte Eigenschaft auch nicht dadurch ersetzt werden kann, daß $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}|Y)$ eine Basis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen besitzt.

4.21 Beispiel. Sei $(X,\mathcal{T})$ eine minimale Gruppe und sei Y eine dichte minimale Untergruppe von $(X,\mathcal{T})$. Es gebe einen nicht-trivialen Normalteiler von X, der mit Y trivialen Durchschnitt hat (dieser ist notwendig nicht $\mathcal{T}$-abgeschlossen). Sei $\mathcal{T}$ die Gruppentopologie auf X, für die $\{N\}$ eine Basis von $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ ist. Dann ist $\mathcal{T}|Y$ diskret, also separiert, und es

besitzt $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}|Y)$ trivialerweise eine Basis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen. Da $\mathcal{T}$ separiert und N nicht-trivial ist, gibt es ein U aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ so, daß N nicht Teilmenge von U ist. Deshalb ist $\mathcal{T}$ nicht feiner als $\mathcal{T}$. Nach Lemma 4.16 ist nun $(\mathcal{T}\wedge\mathcal{T})|Y$ echt gröber als $\mathcal{T}|Y$ und folglich nicht separiert.

Eine Realisierung dieser Situation mit abelscher Gruppe X (also verträglichen Gruppentopologien $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$) erreicht man dadurch, daß man für X den Torus (versehen mit der Standardtopologie), für Y seine Torsionsuntergruppe und für N eine Untergruppe der Form $\langle e^{2\pi ia}\rangle$ mit a aus $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ wählt.

Schließlich beweisen wir noch, daß in 4.15 (b) auch nicht darauf verzichtet werden kann, daß $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ verträglich sind.

4.21 Beispiel. Wir betrachten die Situation in 4.13 und setzen (entsprechend wie in 4.12): $\mathcal{T} := \mathcal{T}_1 \times \vartheta_H$ und $\mathcal{T} := \vartheta_G \times \mathcal{T}_2$. Dann besitzt $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$ eine Basis aus $\mathcal{T}$-abgeschlossenen Mengen. Wir behaupten, daß $\mathcal{T}\wedge\mathcal{T}$ nicht separiert ist und genauer sogar gilt: $(\mathcal{T}\wedge\mathcal{T})|G$ ist die gröbste Topologie.

Beweis. Sei $\mathcal{R} := \mathcal{T}\wedge\mathcal{T}$ und sei W aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{R}|G)$ beliebig. Sei W_1 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{R}|G)$ so, daß $W_1 + W_1 \subset W$ ist, und sei J_1 eine endliche Teilmenge von I so, daß $U_{J_1} \subset W_1$ ist (dabei seien U_J für $J \subset I$ und entsprechend auch V_F für $F \subset G$ wie im Beweis von 4.14 erklärt). Die Abbildung

$$(H, \mathcal{T}|H) \times (G, \mathcal{T}|G) \longrightarrow (G, \mathcal{R}|G),\ (y,x) \longmapsto y(x),$$

ist stetig, da $\mathcal{T}$ und $\mathcal{T}$ feiner als $\mathcal{R}$ sind (vgl. zu Beginn von § 2). Es gibt also endliche Teilmengen F von G und J von I so, daß gilt: für alle y aus V_F und x aus U_J ist y(x) aus W_1. Sei κ ein festes Element aus I, seien J_0, λ, f, a und z der Reihe nach wie im Beweis von 4.14 erklärt bzw. gewählt, wobei zusätzlich gelte, daß λ nicht aus J_1 ist. Dann ist $x := f(z)$ aus W_1. Sei $x_\lambda' := -a$, $x_\iota' := 0$ für alle $\iota \neq \lambda$ und $x' := (x_\iota')_{\iota\in I}$. Es gilt $(x+x')_\kappa = a \neq 0$ und $(x+x')_\iota = 0$ für alle $\iota \neq \kappa$. Da κ aus I und a aus $K\setminus\{0\}$ beliebig wählbar waren, ist $\mathcal{R}|G$ und folglich auch $\mathcal{R}$ nicht separiert. - Ist W_0 aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{R}|G)$ beliebig, so existiert zu jedem n aus $\mathbb{N}$ ein W aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{R}|G)$ mit $\sum_{i=1}^{n} W \subset W_0$. Aus dem zuvor Bewiesenen folgt $W_0 = G$, d.h. $\mathcal{R}|G$ ist die gröbste Topologie. ./.

§ 5 Dichte Untergruppen von $(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}} \underset{\eta}{\times} \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}))^I$

Das wichtigste Ergebnis dieses Paragraphen ist eine scharfe Abgrenzung der Vererbbarkeit der Minimalität auf das Zentrum einer Gruppe. Mit Hilfe der oben genannten Gruppen können wir die Existenz präkompakter q-minimaler Gruppen nachweisen, die einen abgeschlossenen nicht-minimalen Normalteiler besitzen. Das einfachste Beispiel hierfür ist

$$(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})^{(\mathbb{N})} \underset{\eta}{\times} (\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}))^{\mathbb{N}} \quad (\eta = \text{Einbettung}).$$

Der nur an dieser Abgrenzung interessierte Leser kann direkt zu 5.13 übergehen.

5.1 Bezeichnungen. Während des gesamten Paragraphen verstehen wir unter

- n eine natürliche Zahl,
- C_n die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$, versehen mit der diskreten Topologie,
- Γ_n die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(C_n)$ von C_n, gleichfalls versehen mit der diskreten Topologie,
- η die Einbettung von H in Aut(G), wenn H eine Untergruppe der Automorphismengruppe einer gegebenen Gruppe G ist,
- I eine unendliche Indexmenge.

5.2 Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt der topologischen Gruppen G und H. Dann kann man $(G \underset{\sigma}{\times} H)^I$ bzw. $(G \underset{\sigma}{\times} H)^{(I)}$ in kanonischer Weise als topologische semi-direkte Produkte von G^I und H^I bzw. von $G^{(I)}$ und $H^{(I)}$ auffassen (jeweils bezüglich des Homomorphismus $(y_\iota)_{\iota\in I} \longmapsto (\sigma)_{\iota\in I}((y_\iota)_{\iota\in I})$ mit $(\sigma)_{\iota\in I}((y_\iota)_{\iota\in I})((x_\iota)_{\iota\in I}) := (\sigma_{y_\iota}(x_\iota))_{\iota\in I}$). Außerdem kann man kanonisch topologische semi-direkte Produkte von G^I und $H^{(I)}$ bzw. von $G^{(I)}$ und H^I assoziieren. Speziell mit $C_n \underset{\eta}{\times} \Gamma_n$ assoziieren wir auf diese Weise die topologischen semi-direkten Produkte $C_n{}^I \underset{\eta}{\times} \Gamma_n{}^I$, $C_n{}^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma_n{}^{(I)}$, $C_n{}^I \underset{\eta}{\times} \Gamma_n{}^{(I)}$ und $C_n{}^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma_n{}^I$.

Auf das nächste Lemma wollen wir in § 6 noch einmal zurückgreifen.

5.3 Lemma. Sei $(G_\iota)_{\iota\in J}$ eine nicht-leere Familie von Gruppen und sei N ein Normalteiler ihres direkten Produkts. Dann gilt für jedes κ aus J, für das G_κ zentrumslos und $pr_\kappa(N)$ nicht-trivial ist (pr_κ = kanonische Projektion), daß $N \cap (G_\kappa \times \prod_{\iota\in J\setminus\{\kappa\}} \{e_\iota\})$ nicht-trivial ist.

Beweis. Sei κ aus J derart, daß $Z(G_\kappa) = \{e_\kappa\}$ und $pr_\kappa(N) \neq \{e_\kappa\}$ ist, und sei x aus N so, daß $pr_\kappa(x) \neq e_\kappa$ ist. Da G_κ zentrumslos ist, existiert ein y_κ aus G_κ, das mit $pr_\kappa(x)$ nicht kommutiert. Setzt man $y_\iota := e_\iota$ für alle ι aus $J\setminus\{\kappa\}$ und $y := (y_\iota)_{\iota\in J}$, so ist $xyx^{-1}y^{-1}$ ein nicht-triviales Element aus dem Durchschnitt von N und $G_\kappa \times \prod_{\iota\in J\setminus\{\kappa\}} \{e_\iota\}$. ./.

5.4 Behauptung. Sei $(G_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie minimaler Gruppen, von denen nur endlich viele G_ι nicht zentrumslos sind. Das direkte Produkt $\prod_{\iota\in I} G_\iota$ sei minimal. Dann ist auch das schwach direkte Produkt $\prod^*_{\iota\in I} G$ minimal. Insbesondere sind schwach direkte Produkte kompakter zentrumsloser Gruppen minimal.

Beweis. Der Beweis läuft über das Banaschewski-Kriterium. Wir setzen $E := \{\iota\in I \mid Z(G_\iota) \neq \{e_\iota\}\}$ und betrachten einen nicht-trivialen Normalteiler N von X. Falls für jedes x aus N höchstens solche Komponenten x_ι von e_ι verschieden sind, deren Index ι zu E gehört, ist $N \cap \prod^*_{\iota\in I} G_\iota$ offensichtlich nicht-trivial. Andernfalls aber existiert ein x aus N und ein κ aus $I\setminus E$ derart, daß $pr_\kappa(x) \neq e_\kappa$ ist. Nach Lemma 5.3 schneidet dann N die Untergruppe $G_\kappa \times \prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} \{e_\iota\}$ von $\prod^*_{\iota\in I} G$ nicht-trivial. ./.

Das q-minimale Analogon für topologisch einfache zentrumslose Gruppen verschieben wir auf später (s. 6.15). Dabei heißt eine separierte Gruppe X topologisch einfach, wenn sie außer $\{e\}$ und X keine abgeschlossenen Normalteiler besitzt.

Eine partielle Umkehrung von Behauptung 5.4 beinhaltet die nachstehende Folgerung.

5.5 Folgerung. Für eine minimale Gruppe G sind äquivalent:
(a) $G^{(I)}$ ist minimal.
(b) G^I ist minimal und G ist zentrumslos.

Beweis. Wir haben nur noch die Implikation (a) $\Longrightarrow$ (b) zu klären. Sie ergibt sich aus 4.1, der Relation $Z(G^{(I)}) = (Z(G))^{(I)}$ und der folgenden Überlegung: Ist F eine separierte nicht-triviale abelsche Gruppe, so ist die Gruppe $F^{(I)}$ nicht minimal, da sie den abgeschlossenen nicht-trivialen Normalteiler $\{(x)_{\iota\in I} | x\in F\}$ von F^I trivial schneidet. ./.

5.6 Bemerkung. Man kommt im Beweis von Folgerung 5.5 genau so gut ohne 4.1 aus, wenn man gleich den Durchschnitt der Diagonalen von G^I mit dem Zentrum von G^I ins Auge faßt und das Banaschewski-Kriterium direkt anwendet.

Wir wollen mit Hilfe von Folgerung 5.5 feststellen, für welche natürlichen Zahlen n die separierten Gruppen

$$C_n^{(I)} \underset{\eta}{\times} (\mathrm{Aut}(C_n))^{(I)} \cong (C_n \underset{\eta}{\times} \mathrm{Aut}\ (C_n))^{(I)}$$

minimal sind. Dazu untersuchen wir allgemein das Zentrum eines semi-direkten Produkts.

Ist G eine Gruppe, so verstehen wir unter Inn(G) die Gruppe der inneren Automorphismen von G. Ist weiter Γ eine Untergruppe von Aut(G), so sei

$$\mathrm{Fix}(\Gamma) := \{x\in G \mid \text{für alle } f \text{ aus } \Gamma \text{ ist } f(x) = x\}$$

die Menge der Fixpunkte von Γ.

5.7 Behauptung. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ das semi-direkte Produkt der Gruppen G und H bezüglich eines Homomorphismus σ. Es gelte

$$\sigma(H) \supset \mathrm{Inn}(G).$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} Z(G \underset{\sigma}{\times} H) &= (Z(G) \cap \mathrm{Fix}(\sigma(H)) \times (Z(H) \cap \mathrm{Kern}\sigma) \\ &= (Z(G) \times Z(H)) \cap (\mathrm{Fix}(\sigma(H)) \times \mathrm{Kern}\sigma). \end{aligned}$$

Beweis. Wir haben nur das erste Gleichheitszeichen zu beweisen:
"$\supset$" (gilt auch ohne die Voraussetzung $\sigma(H) \supset \mathrm{Inn}(G)$): Sei a aus $Z(G) \cap \mathrm{Fix}(\sigma(H))$, b aus $Z(H) \cap \mathrm{Kern}\sigma$ und (x,y) aus $G \underset{\sigma}{\times} H$. Dann gilt

$$(a,b)(x,y) = (a\sigma_b(x),by) = (ax,by) = (xa,yb)$$
$$= (x\sigma_y(a),yb) = (x,y)(a,b).$$

"$\subset$": Sei (a,b) aus $Z(G \underset{\sigma}{\times} H)$. Da für jedes Paar (x,y) aus $G \underset{\sigma}{\times} H$ die Beziehung

$$(x\sigma_y(a),yb) = (a\sigma_b(x),by)$$

zutrifft, folgt, daß b aus $Z(H)$ ist und daß gilt:
(*) für alle x aus G und y aus H ist $\sigma_b(x)\sigma_y(a)^{-1} = a^{-1}x$.
Ersetzt man y in (*) durch b und x durch xa, so erhält man
(**) für alle x aus G ist $\sigma_b(x) = a^{-1}xa$.
Eine Rückwirkung von (**) auf (*) liefert, daß $\sigma_y(a) = a$ ist für alle y aus H, d.h., daß a zu $\mathrm{Fix}(\sigma(H))$ gehört.
Sei c aus G beliebig. Für x aus G setzen wir

$$\rho_c(x) := cxc^{-1}.$$

Wegen $\mathrm{Inn}(G) \subset \sigma(H)$ gibt es ein y aus H mit $\sigma_y = \rho_c$.
Da a aus $\mathrm{Fix}(\sigma(H))$ ist, gilt

$$a = \sigma_y(a) = \rho_c(a) = cac^{-1}.$$

Also ist a aus $Z(G)$ und aus (**) folgt jetzt auch, daß b ein Element von $\mathrm{Kern}\sigma$ ist. ./.

5.8 Folgerung. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ das semi-direkte Produkt der Gruppen G und H bezüglich eines Homomorphismus σ. Dann gilt

$$Z(G \underset{\sigma}{\times} H) = \mathrm{Fix}(\sigma(H)) \times \{e\},$$

wenn G abelsch und σ injektiv ist.

5.9 Bemerkung. Sei G eine nicht-triviale zentrumslose Gruppe. Es gebe in G eine abelsche Untergruppe $H \neq \{e\}$, für die $H \setminus \{e\}$ nur aus Elementen der Ordnung 2 besteht. Wir bezeichnen mit ρ den Homomorphismus

$$\rho : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(G)$$
$$y \longmapsto \rho_y \text{ mit}$$
$$\rho_y(x) := yxy^{-1}.$$

Dann gelten im Hinblick auf das Zentrum von $G \underset{\rho}{\times} H$ die Relationen:

$$\begin{aligned}\{e\} &= (Z(G) \cap \mathrm{Fix}(\rho(H))) \times (Z(H) \cap \mathrm{Kern}\rho) \\ &\subsetneq Z(G \underset{\rho}{\times} H) \\ &= \{(b,b) \mid b \in H\} \subsetneq (\mathrm{Fix}(\rho(H))) \times Z(H).\end{aligned}$$

Beweis. Da G zentrumslos ist, hat ρ einen trivialen Kern, so daß das erste Gleichheitszeichen berechtigt ist. Wenn

$$Z(G \underset{\rho}{\times} H) = \{(b,b) \mid b \in H\}$$

nachgewiesen ist, sind auch die weiteren Relationen klar ersichtlich.
Da H abelsch ist und $H \setminus \{e\}$ nur Elemente der Ordnung 2 besitzt, kommutiert jedes Paar (b,b) für b aus H mit jedem Element aus $G \underset{\rho}{\times} H$. Ist andererseits (a,b) aus $Z(G \underset{\rho}{\times} H)$, so folgt für alle (x,e) aus $G \underset{\rho}{\times} H$, daß $(ab)x = x(ab)$ ist. Somit ist ab aus Z(G), also $a = b^{-1} = b$. ./.

Als Beispiel für G in 5.9 bietet sich die symmetrische Gruppe über einer Menge mit drei oder mehr Elementen an. Für H nimmt man dann eine Untergruppe von G, die von einer nicht-leeren Menge von paarweise disjunkten Transpositionen erzeugt wird.

Zur Bestimmung des Zentrums von $C_n \underset{\eta}{\times} \Gamma_n$ können wir uns gemäß Folgerung 5.8 auf die Bestimmung von $\mathrm{Fix}(\Gamma_n)$ zurückziehen. Der Sachverhalt wird auf einfache Weise im nachfolgenden Lemma geklärt. Dazu sei vorher bemerkt, daß C_n für ungerades n kein Element der Ordnung 2 und für gerades n genau ein Element der Ordnung 2 besitzt.

5.10 Lemma. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ das semi-direkte Produkt der Gruppen G und H bezüglich eines Homomorphismus σ. Sei G abelsch und σ injektiv. Außerdem gehöre der Automorphismus $j : G \longrightarrow G,\ x \longmapsto x^{-1}$, zu $\sigma(H)$.
Dann ist $\mathrm{Fix}(\sigma(H))$ Teilmenge von $\{x \in G \mid x^2 = e\}$. Insbesondere ist $\mathrm{Fix}(\sigma(H))$ trivial, wenn G kein Element der Ordnung 2 besitzt.

Darüber hinaus gilt: Besitzt G genau ein Element a der Ordnung 2, so ist $Fix(\sigma(H))$ nicht trivial (also gleich $\{e,a\}$).

Beweis. Für x aus $Fix(\sigma(H))$ gilt $j(x) = x$, also $x^2 = e$, woraus sich die erste Aussage des Lemmas ergibt.
Besitzt nun G genau ein Element $a \neq e$ mit $a^2 = e$, so gilt für jeden Automorphismus y von G wegen

$$e = y(a^2) = y(a)^2 \quad \text{und} \quad y(a) \neq e$$

stets $y(a) = a$. ./.

Aus 5.5, 5.8 und 5.10 erhalten wir den allgemeinen Satz:

5.11 Satz. Sei K eine abelsche Gruppe und sei Γ eine Untergruppe von Aut(K) derart, daß der Automorphismus $x \longrightarrow x^{-1}$ von K zu Γ gehört. Seien K und Γ mit kompakten Gruppentopologien versehen derart, daß die Abbildung

$$\Gamma \times K \longrightarrow K, \quad (y,x) \longmapsto y(x)$$

stetig (d.h. $K \underset{\eta}{\times} \Gamma$ ein topologisches semi-direktes Produkt) ist.
Dann ist $K^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma^{(I)}$ minimal, wenn K kein Element der Ordnung 2 besitzt und nicht minimal, wenn K genau ein Element der Ordnung 2 besitzt. ./.

Insbesondere gilt

5.12 Folgerung. Die separierte Gruppe $C_n^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma_n^{(I)}$ ist genau dann minimal, wenn n ungerade ist.

Wir stellen nun die q-Minimalität in den Vordergrund unserer Betrachtungen.

5.13 Bemerkungen.

(a) Wir beschreiben Γ_n. Jeder Endomorphismus der zyklischen Gruppe C_n ist durch seinen Wert an der Stelle $1+\mathbb{Z}$ eindeutig bestimmt. Es gibt also höchstens n Endomorphismen von C_n. Andererseits ist für jedes a aus $\{0,\ldots,n-1\}$

durch $f_a : C_n \longrightarrow C_n$, $x+\mathbb{Z} \longmapsto ax+\mathbb{Z}$ ein Endomorphismus von C_n gegeben, so daß $\{f_a \mid a\in\{0,\dots,n-1\}\}$ genau die Menge der Endomorphismen von C_n darstellt. Es folgt insbesondere, daß Γ_n abelsch ist.
Da f_a für a aus $\{0,\dots,n-1\}$ genau dann injektiv ist, wenn der größte gemeinsame Teiler (a,n) von a und n trivial ist, gilt

$$\Gamma_n = \{f_a \mid a\in\{1,\dots,n-1\}, (a,n) = 1\}.$$

(b) Da Γ_n abelsch ist, ergibt sich aus 5.5, daß ${\Gamma_n}^{(I)}$ für $n \geq 3$ nicht minimal ist (Γ_2 ist einelementig). Folglich sind für $n \geq 3$ die separierten Gruppen ${C_n}^{(I)} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{(I)}$ und ${C_n}^{I} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{(I)}$ nicht q-minimal.

(c) Immerhin ist ${C_n}^{I} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{(I)}$ für alle n aus $\mathbb{N}$ noch minimal. Zum Beweis sei $n \geq 3$, N ein nicht-trivialer Normalteiler von ${C_n}^{I} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{I}$ und $((1_\iota),(m_\iota))$ ein nicht-triviales Element von N. Für beliebiges (x_ι) aus ${C_n}^{I}$ ist der Kommutator
$((x_\iota),e)((1_\iota),(m_\iota))((x_\iota),e)^{-1}((1_\iota),(m_\iota))^{-1} = ((x_\iota - m_\iota(x_\iota)),e)$
aus N. Entweder ist nun $m_\iota = id_{C_n}$ für alle ι aus I (also $((1_\iota),(m_\iota))$ aus ${C_n}^{I} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{(I)}$) oder es gibt ein κ aus I und ein x_κ aus C_n so, daß $m_\kappa(x_\kappa) \neq x_\kappa$ ist. In beiden Fällen schneidet N die Gruppe ${C_n}^{I} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{(I)}$ nicht-trivial.

Wir werden zeigen, daß für ungerades n die Gruppe ${C_n}^{(I)} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{I}$ q-minimal ist. Dazu benutzen wir 1.14 (d) und 1.12 (b), wobei uns zustatten kommt, daß die Normalteiler von ${C_n}^{I} \underset{\eta}{\times} {\Gamma_n}^{I}$ eine einfache Gestalt haben. Verantwortlich hierfür ist, daß Γ_n abelsch ist und der Homomorphismus f_2 (Bezeichnung wie in 5.13 (a)) für ungerades n zu Γ_n gehört.
In bezug auf 5.10 und 5.11 sei bemerkt, daß eine abelsche Gruppe, für die der Endomorphismus $x \longmapsto 2x$ injektiv ist, keine Elemente der Ordnung 2 besitzt.

5.14 Lemma. Sei K eine abelsche (additiv geschriebene) Gruppe, für die der Endomorphismus $f : K \longrightarrow K$, $x \longmapsto 2x$, ein Automorphismus ist. Sei Γ eine abelsche (multiplikativ geschriebene)

Untergruppe von Aut(K) und sei f aus Γ. Sei N ein Normalteiler von $K^I \underset{\eta}{\times} \Gamma^I$. Dann gilt

(a) $N = pr_G(N) \underset{\eta}{\times} pr_H(N)$ und

(b) $pr_G(N) \supset \prod^{*}_{\iota \in I} pr_\iota(pr_G(N))$.

Dabei bezeichnen pr_G bzw. pr_H die kanonischen Projektionen von $K^I \underset{\eta}{\times} \Gamma^I$ auf K^I bzw. Γ^I. Für eine Überlegung im Anschluß an 5.18 halten wir außerdem fest:

(c) Ist J die Menge $\{\kappa \in I \mid$ es gibt $(1,m) \in N$ mit $pr_\kappa(1) \neq 0\}$, so gilt:

$$pr_H(N) \subset \Gamma^J \times \{e\}^{I \setminus J}.$$

Beweis.

(a) Wir haben die Inklusion $N \supset pr_G(N) \times pr_H(N)$ zu beweisen. Dazu zeigen wir zuerst die Gültigkeit der Implikation (***) (1,m) aus $N \Longrightarrow (1,e)$ aus N.
Sei (1,m) aus N und sei $y := (f)_{\iota \in I}$. Dann gehört der Kommutator $(0,y)(1,m)(0,y)^{-1}(1,m)^{-1}$ zu N. Unter Berücksichtigung der Kommutativität von Γ berechnet man
$((o,y)(1,m))((0,y)^{-1}(1,m)^{-1}) = (y(1),ym)(y^{-1}m^{-1}(-1),y^{-1}m^{-1})$
$= (y(1)-ymy^{-1}m^{-1}(1),ymy^{-1}m^{-1}) = (y(1)-1,e) = (1,e)$,
womit (***) verifiziert ist.
Mit (1,m) aus N ist also (1,e) und wegen $(0,m) = (1,e)^{-1}(1,m)$ auch (0,m) aus N. Sind nun 1 aus $pr_G(N)$ und m aus $pr_H(N)$ beliebig, so gehört das Produkt $(1,e)(0,m) = (1,m)$ zu N.

(b) Es genügt nachzuweisen, daß für jedes $1 = (1_\iota)_{\iota \in I}$ aus $pr_G(N)$ und jedes κ aus I das durch $1^{(\kappa)}_\iota := 0$ für $\iota \neq \kappa$ und $1^{(\kappa)}_\kappa := 1_\kappa$ erklärte Element $1^{(\kappa)} = (1^{(\kappa)}_\iota)_{\iota \in I}$ zu $pr_G(N)$ gehört. Denn dann gilt
$pr_G(N) \supset \left\langle \{1^{(\kappa)} \mid 1 \in pr_G(N),\ \kappa \in I\} \right\rangle = \prod^{*}_{\iota \in I} pr_\iota(pr_G(N))$.
Sei also 1 aus $pr_G(N)$, κ aus I und sei jetzt $y = (y_\iota)_{\iota \in I}$ erklärt durch $y_\iota := e$ für $\iota \neq \kappa$ und $y_\kappa := f$. Nach (a) ist (1,e) aus N, also auch
$$(0,y)(1,e)(0,y)^{-1}(1,e)^{-1} = (y(1)-1,e) = (1^{(\kappa)},e).$$

(c) Angenommen, es gibt ein $(1,m) = (1,(m_\iota)_{\iota \in I})$ aus N und ein κ aus $I \setminus J$ mit $m_\kappa \neq e$. Dann existiert ein x_κ aus K mit $m_\kappa(x_\kappa) \neq x_\kappa$. Wir setzen $x_\iota := 0$ für ι aus $I \setminus \{\kappa\}$ und $x := (x_\iota)_{\iota \in I}$. Da (0,m) aus N ist, gehört auch
$$(x,e)(0,m)(x,e)^{-1} = (x-m(x),m)$$
zu N. Nach Definition von J folgt $m_\kappa(x_\kappa) = x_\kappa$. Widerspruch. ./.

Mit Hilfe von 1.14 (d), 1.12 (a) und (b) erhalten wir aus 5.14:

5.15 Satz. Sei K eine kompakte abelsche Gruppe, für die der Endomorphismus $f : K \longrightarrow K$, $x \longmapsto 2x$, ein Automorphismus ist. Sei Γ eine abelsche Untergruppe von Aut(K) und sei f aus Γ. Sei Γ mit einer kompakten Gruppentopologie versehen derart, daß die Abbildung $\Gamma \times K \longrightarrow K$, $(y,x) \longmapsto y(x)$, stetig ist. Dann ist das topologische semi-direkte Produkt $K^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma^I$ q-minimal. ./.

Damit haben wir das uns gesteckte Ziel erreicht, nämlich den Nachweis der beiden folgenden Aussagen:
Für jedes ungerade n aus $\mathbb{N}$ ist die separierte Gruppe $C_n^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma_n^I$ q-minimal.
Ein abgeschlossener Normalteiler einer präkompkaten q-minimalen Gruppe braucht nicht minimal zu sein (da $C_n^{(I)}$ wegen 5.5 für $n \geqslant 2$ nicht minimal ist).

Für den speziellen Fall, daß K in 5.15 eine topologisch einfache Gruppe ist (insbesondere also für $K = C_p$, wobei $p \geqslant 3$ eine Primzahl ist), wollen wir noch einen Beweis geben, der nicht über 1.14 (d) führt.
Unsere eigentliche Absicht ist dabei, die im Sinne von (a) in 5.14 "zerfallenden" Normalteiler eines (topologischen) semi-direkten Produkts und die Quotienten nach diesen zu charakterisieren.

5.16 Lemma. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein semi-direktes Produkt der Gruppen G und H. Seien L bzw. M Normalteiler von G bzw. H. Dann sind die Aussagen (a), (b) und (c) äquivalent.

(a) $L \times M$ ist Normalteiler von $G \underset{\sigma}{\times} H$.

(b) Es gelten die Invarianzeigenschaften (i) und (ii):

(i) für jedes l aus L und y aus H ist $\sigma_y(l)$ aus L und

(ii) für jedes (l,m) aus $L \times M$ und x aus G ist $xl\sigma_m(x^{-1})$ aus L.

(c) Es gelten (i) aus (b) und

(iii) für jedes (l,m) aus $L \times M$ und je zwei Elemente x,x' aus G mit $xL = x'L$ ist $xl\sigma_m(x'^{-1})$ aus L.

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ (b): Für l aus L, m aus M, x aus G und y aus H sind

$$(\sigma_y(l),e) = (e,y)(l,e)(e,y)^{-1}$$

und

$$(xl\sigma_m(x^{-1}),m) = (x,e)(l,m)(x,e)^{-1}$$

Elemente von L x M, wenn L x M Normalteiler von $G \underset{\sigma}{\times} H$ ist.

(b) $\Rightarrow$ (a): Für (l,m) aus L x M und (x,y) aus $G \underset{\sigma}{\times} H$ gehört

$$(x^{-1},y^{-1})^{-1}(l,m)(x^{-1},y^{-1}) = (\sigma_y(xl\sigma_m(x^{-1})),ymy^{-1})$$

zu L x M, da wegen (ii) $xl\sigma_m(x^{-1})$ aus L und folglich nach (i) auch $\sigma_y(xl\sigma_m(x^{-1})$ aus L ist.

Es bleibt noch (ii) $\Rightarrow$ (iii) zu zeigen: Sei (l,m) aus L x M und seien x und x' aus G mit xL = x'L. Aufgrund von (ii) ist $l\sigma_m(x'^{-1})$ aus $x'^{-1}L = x^{-1}L$, also

$$xl\sigma_m(x'^{-1}) \text{ aus } L. \quad ./.$$

5.17 Behauptung. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein semi-direktes Produkt der Gruppen G und H. Seien L bzw. M Normalteiler von G bzw. H derart, daß L x M ein Normalteiler von $G \underset{\sigma}{\times} H$ ist. Dann ist

$$\tau : {}^{H}/_{M} \longrightarrow \mathrm{Aut}({}^{G}/_{L})$$

$$yM \longmapsto \tau_{yM} \text{ mit}$$

$$\tau_{yM}(xL) := \sigma_y(x)L$$

ein Homomorphismus und durch

$$\varphi : {}^{(G \times H)}/_{(L \times M)} \longrightarrow ({}^{G}/_{L}) \underset{\tau}{\times} ({}^{H}/_{M})$$

$$(x,y)(L \times M) \longmapsto (xL,yM)$$

ist ein Gruppenisomorphismus gegeben.

Sind G und H topologische Gruppen und ist $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt, so ist auch $({}^{G}/_{L}) \underset{\tau}{\times} ({}^{H}/_{M})$ ein topologisches semi-direktes Produkt und durch φ ist ein topologischer Gruppenisomorphismus gegeben.

Beweis. Zunächst ist τ als Abbildung wohldefiniert: Seien x,x' aus G mit $xL = x'L$ und y,y' aus H mit $yM = y'M$. Wir haben

$$\sigma_y(x)L\sigma_{y'}(x')^{-1} \subset L$$

nachzuweisen. Sei also l aus L. Nach 5.16 (i) ist $\sigma_{y^{-1}}(l)$ aus L und nach 5.16 (iii) ist somit auch

$$x(\sigma_{y^{-1}}(l))\sigma_{y^{-1}y'}(x'^{-1})$$

aus L. Wendet man auf das zuletzt erwähnte Element von L den Homomorphismus σ_y an, so folgt (wieder mit Hilfe von 5.16 (i)): $\sigma_y(x)l\sigma_{y'}(x'^{-1})$ ist aus L.

Weiter erhalten wir: die Homomorphie von τ_{yM} aus 5.16 (i), die Surjektivität von τ_{yM} aus der Relation $\tau_{yM}(\sigma_{y^{-1}}(x)L) = xL$ und die Homomorphie von τ aus derjenigen von σ. Außerdem ist leicht zu sehen, daß φ ein Gruppenisomorphismus ist.

Seien nun G und H topologische Gruppen und sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt. Dann ist offenbar φ stetig. Wir bezeichnen mit

$$q_L : G \longrightarrow {}^{G}/_{L}$$

$$q_M : H \longrightarrow {}^{H}/_{M} \quad \text{und}$$

$$q_{L \times M} : G \times H \longrightarrow {}^{G \times H}/_{L \times M}$$

die kanonischen Abbildungen. Da q_L und q_M offen sind, ist wegen $q_L \times q_M = \varphi \circ q_{L \times M}$ auch φ offen. Damit ist φ eine topologische Abbildung, also ${}^{G}/_{L} \underset{\tau}{\times} {}^{H}/_{M}$ eine topologische Gruppe. ./.

Der andere Zugang zu 5.15 führt jetzt über das folgende Lemma:

5.18 Lemma. Seien G, H_1 und H_2 topologische Gruppen und sei $G \underset{\sigma}{\times} (H_1 \times H_2)$ ein topologisches semi-direktes Produkt derart, daß $\{e\} \times H_2$ im Kern von σ liegt. Sei σ_1 der Homomorphismus

$$\sigma_1 : H_1 \longrightarrow \mathrm{Aut}(G),\ y_1 \longmapsto \sigma_{(y_1,e)}\ .$$

Dann ist $G \underset{\sigma_1}{\times} H_1$ ein topologisches semi-direktes Produkt und die topologischen Gruppen $G \underset{\sigma}{\times}(H_1 \times H_2)$ und $(G \underset{\sigma_1}{\times} H_1)\times H_2$ sind kanonisch isomorph.

Beweis. Man verifiziert, daß durch

$$G \underset{\sigma}{\times}(H_1 \times H_2) \longrightarrow (G \underset{\sigma_1}{\times} H_1)\times H_2$$

$$(x,(y_1,y_2)) \longmapsto ((x,y_1),y_2)$$

eine homomorphe Abbildung gegeben ist. Dabei beachtet man, daß für alle (y_1,y_2) aus $H_1 \times H_2$ gilt:

$$\sigma(y_1,y_2) = \sigma(y_1,e)(e,y_2) = \sigma(y_1,e) \cdot \quad ./.$$

Zweiter Beweis von 5.15, für den speziellen Fall, daß K topologisch einfach ist: Sei N ein abgeschlossener Normalteiler von $K^{(I)} \underset{\gamma}{\times} \Gamma^I$. Nach 5.14 gibt es eine Teilmenge J von I und eine abgeschlossene Untergruppe M von Γ^J so, daß

$$N = ((\prod_{\iota \in I\setminus J}\{0\}) \times K^{(J)}) \times ((\prod_{\iota \in I\setminus J}\{e\}) \times M)$$

ist. Über Behauptung 5.17 erhält man, daß

$$\tau : \Gamma^{I\setminus J} \times \left(\Gamma^J/_M\right) \longrightarrow \mathrm{Aut}(K^{(I\setminus J)})$$

$$z = ((y_\iota)_{\iota \in I\setminus J},(y_\iota)_{\iota \in J}{}^M) \longmapsto \tau_z \quad \text{mit}$$

$$\tau_z((x_\iota)_{\iota \in I\setminus J}) := (y_\iota(x_\iota))_{\iota \in I\setminus J}$$

ein wohldefinierter Homomorphismus und daß

$$\left(K^{(I\setminus J)}\right) \underset{\tau}{\times} \left(\Gamma^{I\setminus J} \times \left(\Gamma^J/_M\right)\right)$$

ein wohldefiniertes topologisches semi-direktes Produkt sind. Nach der gleichen Behauptung und wegen Lemma 5.18 gelten außerdem die Isomorphien

$$\left(K^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma^I\right)/_N \cong \left(K^{(I\setminus J)}\right) \underset{\tau}{\times} \left(\Gamma^{I\setminus J} \times \left(\Gamma^J/_M\right)\right)$$

$$\cong \left(K^{(I\setminus J)} \underset{\eta}{\times} \Gamma^{I\setminus J}\right) \times \left(\Gamma^J/_M\right).$$

Somit ist $\left(K^{(I)} \underset{\eta}{\times} \Gamma^{I}\right)/_{N}$ auffaßbar als direktes Produkt einer minimalen und einer kompakten Gruppe, also minimal. ./.

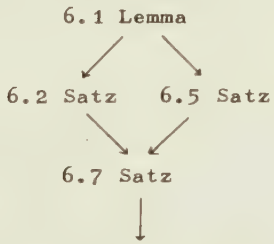
§ 6 Drei-Raum-Probleme und Produkte

Sei X eine topologische Gruppe und G ein Normalteiler von X. Fragen, die sich damit beschäftigen, welche Eigenschaften sich von G und $X/_G$ auf X übertragen, bezeichnet man als Drei-Raum-Probleme (three-space-problems). Uns interessieren die Eigenschaften "minimal" und "q-minimal".

Schon das Beispiel $X = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ versehen mit der p-adischen Topologie bezüglich einer Primzahl p) und $G = \mathbb{Z} \times \{0\}$ zeigt, daß im allgemeinen sogar aus der q-Minimalität eines abgeschlossenen Normalteilers G und des Quotienten $X/_G$ nach diesem nicht auf die Minimalität einer separierten Gruppe X geschlossen werden darf ([8]). Dieser Paragraph enthält einige wichtige positive Aussagen und ein abgrenzendes Gegenbeispiel.

Die positiven Aussagen entstanden in Zusammenarbeit mit S. Dierolf und V. Eberhardt und sind daher Gemeinschaftsresultate. Im Interesse einer umfassenden Darstellung unseres augenblicklichen Wissensstandes auf diesem Gebiet werden sie trotzdem in dieser persönlichen Arbeit vorgestellt.

Unsere Überlegungen nehmen folgenden Weg



Abgrenzendes Beispiel

6.1 Lemma. Sei $(X,\mathfrak{T})$ eine separierte Gruppe und G ein Normalteiler von X. Dann gilt:

(a) Sind $(G,\mathfrak{T}|G)$ und $({}^{X}/_{\overline{G}}\mathfrak{T}, {}^{\mathfrak{T}}/_{\overline{G}}\mathfrak{T})$ minimale Gruppen und ist für jede separierte Gruppentopologie $\mathfrak{T}$ auf X mit $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$ die Relation $\overline{G}^{\mathfrak{T}} = \overline{G}^{\mathfrak{T}}$ erfüllt, so ist $(X,\mathfrak{T})$ minimal.

(b) Sind $(G,\mathfrak{T}|G)$ und $({}^{X}/_{\overline{G}}\mathfrak{T}, {}^{\mathfrak{T}}/_{\overline{G}}\mathfrak{T})$ q-minimale Gruppen und ist für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von $(X,\mathfrak{T})$ und für jede separierte Gruppentopologie $\mathfrak{R}$ auf ${}^{X}/_{N}$ mit $\mathfrak{R} \subset {}^{\mathfrak{T}}/_{N}$ die Relation

$$\overline{\overline{q_N(G)}^{\mathfrak{R}}} = \overline{\overline{q_N(G)}^{\mathfrak{T}}}^{\mathfrak{T}/_N} \qquad (q_N: X \longrightarrow {}^{X}/_{N} \text{ kanonisch})$$

erfüllt, so ist $(X,\mathfrak{T})$ q-minimal.

Beweis.

(a) Mit $\mathfrak{T}|G$ ist auch $\mathfrak{T}|\overline{G}^{\mathfrak{T}}$ minimal, so daß für jede separierte Gruppentopologie $\mathfrak{T}$ auf X mit $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$ die Beziehung $\mathfrak{T}|\overline{G}^{\mathfrak{T}} = \mathfrak{T}|\overline{G}^{\mathfrak{T}}$ gilt. Da für ein derartiges $\mathfrak{T}$ nach Voraussetzung $\overline{G}^{\mathfrak{T}} = \overline{G}^{\mathfrak{T}}$ gilt, ist ${}^{\mathfrak{T}}/_{\overline{G}}\mathfrak{T}$ separierte Gruppentopologie auf ${}^{X}/_{\overline{G}}\mathfrak{T}$ und stimmt deshalb mit der feineren minimalen Gruppentopologie ${}^{\mathfrak{T}}/_{\overline{G}}\mathfrak{T}$ überein. Lemma 1.13 liefert $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}$.

(b) Sei N ein abgeschlossener Normalteiler von $(X,\mathfrak{T})$. Dann ist $q_N(G)$ als stetiges separiertes homomorphes Bild der q-minimalen Gruppe G minimal. Entsprechend ist

$${}^{X}/_{N}/_{\overline{q_N(G)}}{}^{\mathfrak{T}}/_{N}$$

als Bild von ${}^{X}/_{\overline{G}}\mathfrak{T}$ bezüglich der (wohldefinierten) kanonischen Abbildung $x\overline{G}^{\mathfrak{T}} \longmapsto (xN)\overline{q_N(G)}^{\mathfrak{T}/_N}$ minimal. Nun wendet man (a) auf $(q_N(G), {}^{\mathfrak{T}}/_{N}|q_N(G))$ und

$$\left({}^{X}/_{N}/_{\overline{q_N(G)}}{}^{\mathfrak{T}}/_{N}\ ,\ {}^{\mathfrak{T}}/_{N}/_{\overline{q_N(G)}}{}^{\mathfrak{T}}/_{N}\right)$$ an. ./.

Im nachfolgenden Kriterium verschafft man sich die Situation von Lemma 6.1, indem man gewisse lokale Minimalitäts-Eigenschaften (der separierten Gruppe $(X,\mathcal{T})$) voraussetzt. Es hat seine Wurzeln in Sätzen von D. Doitchinov ([8], Theorème 1 und 2) und R.M. Stephenson, Jr. ([26], Theorem 9: Das direkte Produkt G x H zweier minimaler Gruppen G und H ist minimal, wenn jedes y aus H in einer kompakten Untergruppe H_y von H enthalten ist.).

6.2 Satz. Sei X eine separierte Gruppe und G ein Normalteiler von X. Sei A eine Teilmenge von X mit AG = X. Dann gilt: Sind G und $X/_G$ minimale (bzw. q-minimale) Gruppen und ist die Bedingung (*) (bzw. (q-*)):

(*) (bzw. (q-*)) { für jedes z aus A gibt es eine z enthaltende Untergruppe H_z von X mit der Eigenschaft, daß GH_z minimal (bzw. q-minimal) ist,

erfüllt, so ist X minimal (bzw. q-minimal).

Beweis. Wir beweisen zunächst die Aussage im minimalen Fall unter der Bedingung (*). Sei $\mathcal{T}$ die gegebene Topologie auf X und $\mathcal{T}'$ eine separierte Gruppentopologie auf X mit $\mathcal{T}' \subset \mathcal{T}$. Wählen wir für jedes z aus A eine es enthaltende Untergruppe H_z von X mit der Eigenschaft, daß GH_z minimal ist, so gilt jeweils:

$$\overline{G}^{\mathcal{T}} \cap GH_z = \overline{G}^{\mathcal{T}|GH_z} = \overline{G}^{\mathcal{T}'|GH_z} = \overline{G}^{\mathcal{T}'} \cap GH_z .$$

Aus $X = \bigcup_{z\in A} GH_z$ folgt $\overline{G}^{\mathcal{T}} = \overline{G}^{\mathcal{T}'}$.

Ist im q-minimalen Fall unter der Bedingung (q-*) nun N ein abgeschlossener Normalteiler von X und ist $q_N: X \to {}^X/_N$ die kanonische Abbildung, so sind $q_N(G)$ und ${}^{X/_N}/_{q_N(G)}$ ${}^X/_N$ minimal (Argumentation wie im Beweis von Lemma 6.1 (b)). Da auch $q_N(GH_z) = q_N(G)q_N(H_z)$ minimal ist und da

$$q_N(A)q_N(G) = q_N(AG) = {}^X/_N$$

gilt, ist nach dem minimalen Fall ${}^X/_N$ minimal. Da N beliebig war, ist X q-minimal. ./.

6.3 Folgerung. Gibt es in einer separierten abelschen Torsionsgruppe X eine abgeschlossene Untergruppe G derart, daß G und $X/_G$ q-minimal sind, so ist X q-minimal.

Beweis. Für jedes z aus X zeigt man, daß $G\langle z\rangle$ q-minimal ist, indem man 6.1 (b) in bezug auf $\langle z\rangle$ und $G\langle z\rangle$ verwendet. Dabei beachtet man, daß $G\langle z\rangle/_{\langle z\rangle} = q_{\langle z\rangle}(G)$ q-minimal ist, da G es ist, und daß $q_N(\langle z\rangle)$ endlich, also abgeschlossen ist in jeder separierten Topologie auf $G\langle z\rangle/_N$ für jede abgeschlossene Untergruppe N von $G\langle z\rangle$ ($q_M : G\langle z\rangle \longrightarrow G\langle z\rangle/_M$ kanonisch). ./.

Wir bezeichnen eine separierte Gruppe als beidseitig vollständig, wenn sie vollständig bezüglich ihrer beidseitigen Uniformität ist. Wir benötigen noch folgenden Begriff:

6.4 Definition. Eine separierte Gruppe X heißt erblich beidseitig vollständig, wenn für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von X die separierte Gruppe $X/_N$ beidseitig vollständig ist.

Zur Klasse der erblich beidseitig vollständigen Gruppen gehören die lokalkompakten Gruppen, die metrischen vollständigen Gruppen (vgl. [5], Ch. IX, § 3.1, Proposition 4) und die separierten beidseitig vollständigen topologisch einfachen Gruppen. Jedes stetige homomorphe Bild einer erblich beidseitig vollständigen q-minimalen Gruppe ist erblich beidseitig vollständig.

6.5 Satz. Sei X eine separierte Gruppe und G ein beidseitig vollständiger (bzw. erblich beidseitig vollständiger) Normalteiler von X. Dann gilt:
Sind G und $X/_G$ minimale (bzw. q-minimale) Gruppen, so ist X minimal (bzw. q-minimal).

Beweis. Sei $\mathfrak{T}$ die gegebene Topologie auf X und $\mathfrak{T}'$ eine separierte Gruppentopologie auf X mit $\mathfrak{T}' \subset \mathfrak{T}$. Da $\mathfrak{T}'|G = \mathfrak{T}|G$ ist, folgt aus der beidseitigen Vollständigkeit von $(G, \mathfrak{T}|G)$:

$$\overline{G}^{\mathfrak{T}} = G = \overline{G}^{\mathfrak{T}'}.$$

Dies liefert den Beweis für den minimalen Fall (nach 6.1 (a)). Der q-minimale Fall folgt analog. ./.

6.6 Folgerung. Sei X eine separierte Gruppe und G ein Normalteiler von X. Dann gilt:
Sind G und $X/_{\overline{G}}X$ minimale (bzw. q-minimale) Gruppen (und ist im q-minimalen Fall die beidseitige Vervollständigung $\tilde{G}$ von G erblich beidseitig vollständig), so ist die beidseitige Vervollständigung $\tilde{X}$ von X minimal (bzw. q-minimal). Genauer gilt unter diesen Voraussetzungen sogar, daß $\tilde{G}X$, aufgefaßt als Untergruppe von $\tilde{X}$, minimal (bzw. q-minimal) ist. Insbesondere ist unter diesen Voraussetzungen X genau dann minimal (bzw. q-minimal), wenn jeder abgeschlossene nichttriviale Normalteiler N von $\tilde{G}X$ die Untergruppe X von $\tilde{G}X$ nicht-trivial schneidet (bzw. wenn für jedes solche N der Durchschnitt $N \cap X$ dicht in N ist).

Beweis. Es ist $\tilde{G} = \bar{G}^{\tilde{G}X}$ abgeschlossener Normalteiler von $\tilde{G}X$. Der Quotient $\tilde{G}X/_{\tilde{G}}$ ist minimal (bzw. q-minimal), da $X/_{\overline{G}}X$ es ist. ./.

6.7 Satz. Sei X eine separierte Gruppe und G ein Normalteiler von X. Sei A eine Teilmenge von X mit AG = X.
Seien G und $X/_{\overline{G}}$ minimale (bzw. q-minimale) Gruppen. Es sei die Bedingung (**) bzw. q-**):

(**) (bzw. (q-**)): für jedes z aus A gibt es eine z enthaltende beidseitig vollständige minimale (bzw. erblich beidseitig vollständige q-minimale) Untergruppe H_z von X so, daß H_z Normalteiler in GH_z ist,

erfüllt.
Im minimalen Fall gelte zusätzlich eine der folgenden Bedingungen (i) oder (ii):
(i) jedes in (**) vorkommende H_z schneidet G trivial (d.h. GH_z ist inneres direktes Produkt von G und H_z) oder
(ii) G ist q-minimal.
Dann ist X minimal (bzw. q-minimal).

Beweis. Man stützt sich auf Satz 6.2. Die separierten Gruppen $GH_z/_{H_z}$ sind als kanonische Bilder von G unter den angegebenen Bedingungen minimal (bzw. q-minimal). Da die Untergruppen H_z nach Voraussetzung immer beidseitig vollständige minimale (bzw. erblich beidseitig vollständige q-minimale) Normalteiler von GH_z sind, folgt aus Satz 6.5, daß die Gruppen GH_z minimal

(bzw. q-minimal) sind. ./.

6.8 Bemerkung. Bezüglich der Minimalität der Gruppen GH_z in 6.2 (*) und 6.7 (**) beachte man: Ist X eine separierte Gruppe, G ein abgeschlossener Normalteiler von X und H eine abgeschlossene Untergruppe von X, so ist GH im allgemeinen selbst dann nicht minimal, wenn G q-minimal ist, H nur aus zwei Elementen besteht und GH (inneres) topologisches semi-direktes Produkt von G und H ist. Dadurch wird auch unterstrichen, wie gravierend in 6.7 (**) (bzw. (q-**)) die Forderung an H_z ist, Normalteiler von GH_z zu sein. Für diese Behauptungen sei auf das im Anschluß an 6.13 konstruierte Beispiel verwiesen. Das gleiche Beispiel wird auch zeigen, daß man in Folgerung 6.3 nicht auf die Kommutativität von X verzichten kann.

Wir halten nun die Spezifikationen der Sätze 6.2 und 6.5 für topologische semi-direkte (insbesondere also für direkte) Produkte fest und schließen einige Folgerungen für spezielle direkte Produkte an. Der Grund für die Beschränkung bei den letzteren wurde schon gestreift: Ist $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein semi-direktes Produkt zweier Gruppen G und H und ist M eine Untergruppe von H, so ist $\{e\} \times M$ im allgemeinen kein Normalteiler des induzierten semi-direkten Produkts $G \underset{\sigma|M}{\times} M$ aber automatisch Normalteiler des direkten Produkts $G \times M$.

6.9 Folgerungen.

(a) Ein topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ zweier minimaler (bzw. q-minimaler) Gruppen G und H ist minimal (bzw. q-minimal), wenn es für jedes y aus H eine Untergruppe H_y von H mit $y \in H_y$ so gibt, daß $G \underset{\sigma|H_y}{\times} H_y$ minimal (bzw. q-minimal) ist.

(b) Ein topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ einer beidseitig vollständigen minimalen (bzw. erblich beidseitig vollständigen q-minimalen) Gruppe G und einer minimalen (bzw. q-minimalen) Gruppe H ist minimal (bzw. q-minimal).

(c) Das direkte Produkt G x H zweier minimaler (bzw. q-minimaler) Gruppen G und H ist minimal (bzw. q-minimal), wenn jedes y aus H in einer beidseitig vollständigen minimalen (bzw. erblich beidseitig vollständigen q-minimalen) Untergruppe H_y von H enthalten ist.

(d) (Minimaler Fall von Stephenson [26]). Das direkte Produkt einer minimalen (bzw. q-minimalen) Torsionsgruppe und einer minimalen (bzw. q-minimalen) Gruppe ist minimal (bzw. q-minimal).

(e) (Minimaler Fall von Stephenson [26]). Minimalität und q-Minimalität vererben sich bei Torsionsgruppen auf endliche direkte Produkte.

(f) Das direkte Produkt $G \times \prod_{\iota \in I}^{\bullet} H_\iota$ einer minimalen (bzw. q-minimalen) Gruppe G und eines minimalen (bzw. q-minimalen) schwach direkten Produkts einer Familie $(H_\iota)_{\iota \in I}$ beidseitig vollständiger minimaler (bzw. erblich beidseitig vollständiger q-minimaler) Gruppen H_ι ist minimal (bzw. q-minimal) - wegen (c) und 6.2 mit $A := \{e\} \times \prod_{\iota \in I}^{\bullet} H_\iota$. ./.

Anmerkung zu 6.9 (e): Das Resultat, daß sich q-Minimalität bei abelschen Torsionsgruppen auf endliche direkte Produkte vererbt, ergibt sich auch aus einer Charakterisierung dieser Gruppen in [7], Cor. 3.6.

Da $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ q-minimal ist, ist es also auch $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ ($n \in \mathbb{N}$). Wir wollen bei dieser Gelegenheit alle dichten q-minimalen Untergruppen des n-dimensionalen Torus bestimmen.

6.10 Lemma. Sei X eine q-minimale Gruppe mit der Eigenschaft, daß jedes Element aus der Torsionsuntergruppe T von X in einem endlichen Normalteiler von X liegt. Dann umfaßt jede dichte q-minimale Untergruppe Y von X ganz T.

Beweis. Sei x aus T und N der von x erzeugte Normalteiler. Da N abgeschlossen ist, liegt $N \cap Y$ dicht in N. Da N diskret ist, folgt $N = N \cap Y$. Also ist x aus Y. ./.

Insbesondere umfaßt also jede dichte q-minimale Untergruppe einer q-minimalen abelschen Gruppe X die Torsionsuntergruppe von X und wir erhalten:

6.11 Folgerung. Die dichten q-minimalen Untergruppen von $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$ $(n\in\mathbb{N})$ sind gerade die Obergruppen von $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$.

Nebenbei ergibt sich auch:

6.12 Folgerung. Ein q-minimales schwach direktes Produkt $\prod^*_{\iota\in I} K$ einer unendlichen Familie $(K_\iota)_{\iota\in I}$ endlicher Gruppen hat keine dichte q-minimale echte Untergruppe (vgl. 6.15).

Endlich sei noch bemerkt, daß $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^n$ $(n\in\mathbb{N})$ durchaus eine minimale dichte echte Untergruppe enthält:

6.13 Sei G die im Anschluß an Bemerkung 1.9 beschriebene Gruppe ("Sulley-Gruppe"). Diese ist minimal, da B_r-vollständig. Nach 6.9 (e) sind auch alle ihre endlichen direkten Produkte G^n minimal.

Wir kommen jetzt zu dem in 6.8 angekündigten Beispiel eines separierten nicht-minimalen topologischen semi-direkten Produkts $G \underset{\sigma}{\times} H$ einer q-minimalen Gruppe G und "einer" zweielementigen diskreten Gruppe H. Die Rolle von G wird ein geeignetes schwach direktes Produkt $K^{(I)}$ spielen, wobei es bei der Indexmenge I nur auf ihre Nicht-Endlichkeit ankommen wird.

6.14 Lemma. Sei I (zunächst) eine nicht-leere Menge und $(K_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie topologisch einfacher zentrumsloser topologischer Gruppen. Dann gibt es für jeden abgeschlossenen eigentlichen Normalteiler N von $\prod_{\iota\in I} K_\iota$ (bzw. $\prod^*_{\iota\in I} K_\iota$) eine nicht-leere Teilmenge $J \subsetneq I$ so, daß

$$N = \left(\prod_{\iota\in J} K_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in I\setminus J} \{e_\iota\}\right)$$

$$\left(\text{bzw. } N = \left(\prod_{\iota\in J}^{\bullet} K_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in I\setminus J} \{e_\iota\}\right)\right)$$

gilt.

Beweis. Für einen abgeschlossenen echten Normalteiler N von $\prod_{\iota\in I}^{\bullet} K_\iota$ mit $N \neq \{e\}$ setze man:

$$J := \{\kappa\in I \mid \text{es gibt ein } x\in N \text{ mit } x_\kappa \neq e_\kappa\}.$$

Nach 5.3 ist für jedes κ aus J der Durchschnitt von N und $K_\kappa \times \left(\prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} \{e_\iota\}\right)$ nicht-trivial, also, da K_κ topologisch einfach ist, schon ganz $K_\kappa \times \left(\prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} \{e_\iota\}\right)$. Demnach ist für jedes κ aus I die letztere Gruppe Teilmenge von N. Es folgt

$$\left(\prod_{\iota\in J}^{\bullet} K_\iota\right) \times \left(\prod_{\iota\in I\setminus J} \{e_\iota\}\right) \subset N.$$

Alles weitere ist trivial. ./.

Nach 5.4 vererbt sich Minimalität von direkten Produkten zentrumsloser Gruppen auf die entsprechenden schwach direkten Produkte. Aus 6.14 folgt nun:

6.15 Folgerung. q-Minimalität vererbt sich von direkten Produkten topologisch einfacher zentrumsloser Gruppen auf die entsprechenden schwach direkten Produkte. Insbesondere sind schwach direkte Produkte kompakter topologisch einfacher zentrumsloser Gruppen q-minimal.

Aus Analogiegründen werden wir bei minimalen topologisch einfachen Gruppen stets die Betonung auf deren q-Minimalität legen. Beispiele nicht-kompakter q-minimaler topologisch einfacher Gruppen findet man in [6].
Wie einschneidend in bezug auf 6.15 die topologische Einfachheit ist, zeigen wir nachstehend mit Hilfe der endlichen diskreten symmetrischen Gruppen S_n ($n \geq 3$) und der entsprechenden alternierenden Gruppen A_n (wir wollen uns ab hier für den Rest des Paragraphen auf eine feste unendliche Indexmenge I beziehen):

6.16 Das schwach direkte Produkt $S_n^{(I)}$ $(n \geq 3)$ ist nicht q-minimal, da der separierte Quotient $S_n^{(I)}/A_n(I)$ aufgrund der Isomorphien

$$S_n^{(I)}/A_n(I) \cong \left(S_n/A_n\right)^{(I)} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^{(I)}$$

nicht minimal ist (vgl. [4], Ch. III, § 2, Prop. 21 und Cor. zu Prop. 26 sowie Folgerung 5.5).

Zur Fortführung unserer Konstruktion betrachten wir für eine separierte Gruppe K die topologischen semi-direkten Produkte

$$K^I \underset{\rho}{\times} K^I \quad \text{und}$$

$$K^{(I)} \underset{\rho'}{\times} K^I,$$

bei denen ρ die Abbildung

$$\begin{aligned} \rho : K^I &\longrightarrow \mathrm{Aut}(K^I) \\ y &\longmapsto \rho_y \text{ mit} \\ \rho_y(x) &= yxy^{-1} \end{aligned}$$

und ρ' die von ρ induzierte Abbildung bezeichnet.
Ist x aus K, so schreiben wir kurz $\underline{x}$ für $(x)_{\iota \in I}$.

Für jede abgeschlossene Untergruppe L von K setzen wir

$$H_L := \{\underline{l} \mid l \in L\}$$

und

$$\sigma_L := \rho' | H_L.$$

Es gilt:

6.17 Behauptung. Ist K eine nicht-triviale separierte Gruppe und $L \neq \{e\}$ eine abgeschlossene Untergruppe von K, so ist das separierte topologische semi-direkte Produkt

$$K^{(I)} \underset{\sigma_L}{\times} H_L$$

nicht minimal.

Beweis. Man prüft unmittelbar, daß

$$N := \{(\underline{l}, \underline{l}^{-1}) \mid l \in L\}$$

ein (nicht-trivialer) Normalteiler von $K^I \underset{\rho|H_L}{\times} H_L$ ist. Er hat mit der dichten Untergruppe $K^{(I)} \underset{\sigma_L}{\times} H_L$ von $K^I \underset{\rho|H_L}{\times} H_L$ offenbar trivialen Durchschnitt und ist abgeschlossen in der letzteren Gruppe, wie man der Darstellung

$$N = \left\{ (x,y) \in K^I \underset{\rho|H_L}{\times} H_L \;\middle|\; \text{für alle } \iota,\kappa \in I \text{ ist } pr_\iota(x) = pr_\kappa(y^{-1}) \right\}$$

entnimmt. Die Behauptung folgt damit aus dem Banaschewski-Kriterium. ./.

6.18 Folgerung. Ist K eine kompakte topologisch einfache zentrumslose nicht-triviale Gruppe und L eine endliche nicht-triviale Untergruppe von K, so ist $K^{(I)} \underset{\sigma_L}{\times} H_L$ ein nicht-minimales topologisches semi-direktes Produkt der q-minimalen Gruppe $K^{(I)}$ und der endlichen Gruppe H_L.

6.19 Folgerung. Eine separierte Gruppe, die einen abgeschlossenen q-minimalen Normalteiler von endlichem Index hat, braucht nicht minimal zu sein.

Um schließlich noch zu belegen, daß es für jedes n aus $\mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ ein separiertes nicht-minimales topologisches semi-direktes Produkt $G_1 \underset{\sigma_1}{\times} H_1$ gibt, bei dem H_1 die diskrete zyklische Gruppe der Ordnung n ist und bei dem G_1 eine q-minimale Torsionsgruppe ist mit der zusätzlichen Eigenschaft, daß jedes x aus G_1 in einem endlichen Normalteiler von G_1 enthalten ist, wähle man jeweils K und f entsprechend der Liste (A_n diskrete alternierende Gruppe):

n	K	f
n=2	A_5	Produkt zweier elementfremder Transpositionen
n=3	A_5	Zykel der Länge 3
$n \geqslant 4$ und n gerade	A_{n+2}	Produkt eines Zykels der Länge n und einer elementfremden Transposition
$n \geqslant 5$ und n ungerade	A_n	Zykel der Länge n

und setze $L:=\langle f\rangle$, $G_1:=K^{(I)}$, $H_1:=H_L$ und $\sigma_1:=\sigma_L$ (also $G_1 \underset{\sigma_1}{\times} H_1 = K^{(I)} \underset{\sigma_L}{\times} H_L$). Man berücksichtige auch, daß $G_1 \underset{1}{\times} H_1$ dann selbst Torsionsgruppe ist, da ein semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ genau dann Torsionsgruppe ist, wenn es G und H sind.

§ 7 Spezielle semi-direkte Produkte

Wir setzen die Diskussion solcher algebraischer und topologisch-algebraischer Eigenschaften von topologischen semi-direkten Produkten $G \underset{\sigma}{\times} H$ fort, welche eine Übertragung der Minimalität bzw. q-Minimalität von G und H auf $G \underset{\sigma}{\times} H$ bewirken. Dabei werden die inneren Automorphismen der beidseitigen Vervollständigung $\tilde{G}$ von G eine gewisse Rolle spielen.

Ist $X = G \underset{\sigma}{\times} H$ das topologische semi-direkte Produkt der separierten Gruppen G und H bezüglich eines Homomorphismus σ, so zeigt die folgende Behauptung, daß die Untergruppe $\widetilde{(G \times \{e\})}X$ von $\tilde{X}$ kanonisch als topologisches semi-direktes Produkt von $\tilde{G}$ und H bezüglich eines von σ induzierten Homomorphismus aufgefaßt werden kann.

7.1 Behauptung (S. Dierolf, W. Roelcke). Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ das topologische semi-direkte Produkt der separierten Gruppen G und H bezüglich eines Homomorphismus σ. Dann gibt es einen (eindeutig bestimmten) Homomorphismus

$$\overline{\sigma} : H \longrightarrow \mathrm{Aut}(\tilde{G})$$

mit den Eigenschaften: das durch $\overline{\sigma}$ bestimmte semi-direkte Produkt $\tilde{G} \underset{\overline{\sigma}}{\times} H$ ist ein topologisches semi-direktes Produkt und enthält $G \underset{\sigma}{\times} H$ als (dichte) Untergruppe.

Beweis. Wir fassen das gegebene topologische semi-direkte Produkt als inneres topologisches semi-direktes Produkt von G und H auf und betrachten seine beidseitige Vervollständigung $Z := \widetilde{GH}$. Setzt man $G_1 := \overline{G}^{Z}$, so ist G_1 Normalteiler von Z, also $G_1 H$ Untergruppe von Z.
Insbesondere ist G_1 auch Normalteiler von $G_1 H$. Damit $G_1 H$ ein algebraisches semi-direktes Produkt ist, benötigt man noch $G_1 \cap H = \{e\}$. Da G in GH abgeschlossen ist, gilt dies wegen

$$\overline{G}^{Z} \cap H = \overline{G}^{Z} \cap H \cap GH = \overline{G}^{GH} \cap H = G \cap H = \{e\}.$$

Bezeichnet q die kanonische Abbildung

$$q : G_1H \longrightarrow {}^{G_1H}/_{G_1}$$

so hat man, da G_1 beidseitig vollständig ist, nur noch nachzuweisen, daß

$$q|H : H \longrightarrow {}^{G_1H}/_{G_1}$$

topologisch ist. Dies folgt aber daraus, daß sämtliche Abbildungen in der kanonischen Sequenz

$$H \longrightarrow {}^{GH}/_{G} \longrightarrow q(GH) \longrightarrow {}^{(GH)G_1}/_{G_1} = {}^{G_1H}/_{G_1}$$

topologisch sind (vgl. [4], Ch. III, § 2.7, Proposition 21 und 20). ./.

Ist $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt zweier separierter Gruppen G und H, so verstehen wir unter $\bar{\sigma}$ immer den mit σ gemäß 7.1 assoziierten Homomorphismus.
Durch 7.1 bekommt man in einigen Fällen die Abhängigkeit der Normalteiler der Gruppe $\widetilde{(G \times \{e\})X}$ von denjenigen der Gruppen $\widetilde{G}$ und H in den Griff (vgl. Folgerung 6.6). Dazu dient die folgende Definition.

7.2 Definition. Ein topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ zweier separierter Gruppen G und H hat die Eigenschaft (NE) bzw. (NE'), wenn gilt:

(NE) { jeder abgeschlossene Normalteiler N von $G \underset{\sigma}{\times} H$, für den $N \cap (G \times \{e\})$ trivial ist, ist selbst trivial oder hat die Form $N = \{e\} \times M$ mit $M \subset H$

bzw.

(NE') { jeder abgeschlossene Normalteiler N von $G \underset{\sigma}{\times} H$, für den $N \cap (G \times \{e\})$ trivial ist, ist selbst trivial.

7.3 Lemma. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt einer minimalen (bzw. q-minimalen und topologisch einfachen) Gruppe G und einer separierten Gruppe H. Das topologische semi-direkte Produkt $\widetilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ sei minimal (bzw. q-minimal).

Dann gilt: Hat $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ die Eigenschaft (NE), so ist $G \underset{\sigma}{\times} H$ minimal (bzw. q-minimal).

Beweis. Für einen abgeschlossenen nicht-trivialen Normalteiler N von $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ gilt: entweder ist $N \cap (\tilde{G} \times \{e\})$ ein abgeschlossener nicht-trivialer Normalteiler von $\tilde{G} \times \{e\}$ (und schneidet infolgedessen die dichte minimale Untergruppe $G \times \{e\}$ von $\tilde{G} \times \{e\}$ nicht-trivial) oder es ist $N \subset \{e\} \times H$. Im minimalen Fall ist man damit schon fertig. Im q-minimalen Fall überträgt sich die topologische Einfachheit von G auf $\tilde{G}$ (da G minimal ist), so daß sich im Falle der Nicht-Trivialität von $N \cap (\tilde{G} \times \{e\})$ sofort ergibt: $N \cap (\tilde{G} \times \{e\}) = \tilde{G} \times \{e\}$. Dann aber hat N die Form $N = \tilde{G} \times M$ (mit $M \subset H$) und es ist folglich $N \cap X$ dicht in N. ./.

Auf eine Ausführung allgemeiner Varianten von Lemma 7.3 verzichten wir, da sich keine Anwendungsmöglichkeiten ergeben werden.

Bei der Betrachtung der Eigenschaften (NE) und (NE') beziehen wir uns der bequemeren Schreibweise wegen so lange wie möglich auf $G \underset{\sigma}{\times} H$ anstatt auf $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$. Zunächst eine Randbemerkung:

7.4 Sei $X = G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt zweier separierter Gruppen G und H.

(a) Eine hinreichende Bedingung dafür, daß X die Eigenschaft (NE') hat, lautet: für jeden abgeschlossenen nicht-trivialen Normalteiler N von X ist die Menge

$$\{nzn^{-1}z^{-1} \mid n \in N,\ z \in G \times \{e\}\}$$

nicht-trivial (d.h. $G \times \{e\}$ liegt nicht im Zentralisator eines abgeschlossenen nicht-trivialen Normalteilers von X).

(b) Hat X die Eigenschaft (NE'), so ist σ injektiv.

(c) Ist $\{e\} \times M$ ein Normalteiler von X, so gilt $M \subset \mathrm{Kern}\,\sigma$.

Beweis.
(a) Die angegebene Menge ist Teilmenge von $N \cap (G \times \{e\})$.
(b) Folgt aus der nachstehenden Anmerkung 7.5.
(c) Für jedes x aus G und m aus M ist

$$(x,e)^{-1}\,(e,m)(x,e) = (x^{-1}\sigma_m(x),m)$$

aus $\{e\} \times M$. ./.

7.5 Sei $X = G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt zweier separierter Gruppen G und H. Dann ist $\{e\} \times \text{Kern}\,\sigma$ ein abgeschlossener Normalteiler von X.

Beweis. Die Normalteilereigenschaft von $\{e\} \times \text{Kern}\,\sigma$ besteht nach 5.16 (b) (ii).
Die Abgeschlossenheit erhält man aus der Stetigkeit der Abbildung

$$\varphi : H \times G \longrightarrow G,\ (y,x) \longmapsto \sigma_y(x)$$

und der Gleichung

$$\text{Kern}\,\sigma = \bigcap_{x \in G} \varphi^{-1}(.,x)(\{x\}). \quad ./.$$

Die Untersuchung von Kommutatoren wird uns weiterbringen.

7.6 Lemma. Sei $X = G \underset{\sigma}{\times} H$ ein semi-direktes Produkt der Gruppen G und H. Sei N ein Normalteiler von X mit der Eigenschaft

$$N \cap (G \times \{e\}) = \{e\}.$$

Dann gilt:
(a) Für alle (1,m) aus N und für alle x aus G ist

$$\sigma_m(x) = 1^{-1} \times 1.$$

Das heißt, daß $\sigma(\text{pr}_H(N))$ Teilmenge der Gruppe Inn(G) der inneren Automorphismen von G ist.
(b) Für alle (1,m) aus N und für alle y aus dem Zentrum Z(H) von H ist

$$\sigma_y(1) = 1.$$

Das heißt, daß $\text{pr}_G(N)$ Teilmenge von $\text{Fix}(\sigma(Z(H)))$ ist.

(c) Ist σ injektiv und $\sigma(H)$ Teilmenge des Zentralisators $Z_{Aut(G)}(Inn(G))$ von $Inn(G)$ in $Aut(G)$, so gilt:

für alle $(1,m)$ aus N und für alle y aus H ist

$$\sigma_y(1) = 1.$$

In diesem Fall ist also $pr_G(N)$ sogar Teilmenge von $Fix(\sigma(H))$.

Beweis. Da für jedes n aus N und z aus X der Kommutator $nzn^{-1}z^{-1}$ zu N gehört, gilt $(z = (x,e))$:

(*) { für alle $(1,m)$ aus N und alle x aus G ist $(1\,\sigma_m(x)\,1^{-1}x^{-1},e)$ aus N,

und $(z = (e,y))$:

(**) { für alle $(1,m)$ aus N und alle y aus H ist $(1\,\sigma_{mym^{-1}}(1^{-1}),\ mym^{-1}y^{-1})$ aus N.

Wegen $N \cap (G \times \{e\}) = \{e\}$ folgt (a) aus (*) und (b) aus (**) während (c) sich so ergibt: Nach (a) ist für jedes m aus $pr_H(N)$ das Bild σ_m von m bezüglich σ aus $Inn(G)$. Für jedes y aus H ist σ_y aus $Z_{Aut(G)}(Inn(G))$, so daß $\sigma_m\sigma_y(\sigma_m)^{-1}(\sigma_y)^{-1} = id_G$ ist. Also ist $mym^{-1}y^{-1}$ aus Kern σ, welcher trivial sein soll. Berücksichtigt man dies in (**) und beachtet $N \cap (G \times \{e\}) = \{e\}$, so folgt Behauptung (c). ./.

Der nächste Satz ist unser wichtigstes Resultat in diesem Zusammenhang.

7.7 Satz. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt einer minimalen (bzw. q-minimalen und topologisch einfachen) Gruppe G und einer separierten Gruppe H. Das topologische semi-direkte Produkt $\tilde{G} \underset{\bar{\sigma}}{\times} H$ sei minimal (bzw. q-minimal). Dann gilt:

Ist

$$Inn(\tilde{G}) \cap \bar{\sigma}(H) = \{id_{\tilde{G}}\}$$

und ist eine der beiden folgenden Bedingungen (a) oder (b):

(a) σ ist injektiv,

(b) G ist zentrumslos,

erfüllt, so ist $G \underset{\sigma}{\times} H$ minimal (bzw. q-minimal).

Anmerkung: Nach Folgerung 6.9 (b) ist $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ jedenfalls dann minimal (bzw. genau dann q-minimal), wenn H es ist.

Beweis von Satz 7.7. Wir wenden Lemma 7.3 an. Sei N ein abgeschlossener Normalteiler von $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ mit $N \cap (\tilde{G} \times \{e\}) = \{e\}$. Für (1,m) aus N gilt $\bar{\sigma}_m = id_{\tilde{G}}$ wegen Lemma 7.6 (a) und wegen $\mathrm{Inn}(\tilde{G}) \cap \bar{\sigma}(H) = \{id_{\tilde{G}}\}$.

(a) Mit σ ist auch $\bar{\sigma}$ injektiv, so daß $pr_H(N)$ trivial ist. Daraus resultiert die Trivialität von N insgesamt. Die Gruppe $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ hat also die Eigenschaft (NE').

(b) Aus der Zentrumslosigkeit von G erschließt man mittels der Minimalität von G auch diejenige von $\tilde{G}$, so daß 1 das neutrale Element von G sein muß. Damit hat N die Form $N = \{e\} \times M$ mit $M \subset H$. Die Gruppe $\tilde{G} \underset{\sigma}{\times} H$ hat also die Eigenschaft (NE). ./.

7.8 Folgerungen.

(a) Ein topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ zweier minimaler (bzw. q-minimaler) Gruppen G und H ist minimal (bzw. q-minimal), wenn G abelsch (bzw. abelsch und topologisch einfach) und σ injektiv ist - nach 7.7 samt Anmerkung. Anstelle der Injektivität von σ genügt nach 6.9 (a) sogar, daß jedes y aus H in einer minimalen (bzw. q-minimalen) Untergruppe H_y von H enthalten ist derart, daß $\sigma|H_y$ injektiv ist.

(b) Das direkte Produkt $G \times H$ zweier minimaler (bzw. q-minimaler) Gruppen G und H ist minimal (bzw. q-minimal), wenn G zentrumslos (bzw. topologisch einfach und zentrumslos) ist. Außerdem gilt: Anstelle der Zentrumslosigkeit (bzw. topologischen Einfachheit und Zentrumslosigkeit) von G genügt entsprechend wie in (a) schon, daß jedes x aus G in einer minimalen zentrumslosen (bzw. q-minimalen topologisch einfachen zentrumslosen) Untergruppe von G enthalten ist.

(c) Das direkte Produkt eines endlichen direkten Produkts minimaler zentrumsloser (bzw. q-minimaler topologisch einfacher zentrumsloser) Gruppen und einer minimalen (bzw. q-minimalen) Gruppe ist minimal (bzw. q-minimal).

Über nicht-endliche separierte topologisch einfache abelsche Gruppen ist relativ wenig bekannt (vgl. [17], p.161). Offen ist insbesondere, ob es nicht-kompakte q-minimale topologisch einfache abelsche Gruppen gibt. Diese müßten präkompakt und torsionsfrei sein. Nicht-minimale nicht-kompakte topologisch einfache torsionsfreie abelsche Gruppen findet man schon im Torus.

Eine weitere Folgerung aus 7.7 betrifft Behauptung 2.6 in § 2:

7.9 Folgerung. In der Situation von 2.6 gilt auch umgekehrt: Ist K zentrumslos, so ist $K^{(H)} \underset{\sigma'}{\times} H$ minimal (Bezeichnungen wie in 2.6).

Beweis. Wir zeigen:

$$\mathrm{Inn}(K^H) \cap \sigma(H) = \{\mathrm{id}_{K^H}\} .$$

Sei y aus H und sei $z = (z_h)_{h\in H}$ so, daß für alle $(x_h)_{h\in H}$ die Relationen

$$(x_{hy})_{h\in H} = \sigma_y((x_h)_{h\in H}) = z(x_h)_{h\in H}z^{-1}$$

gelten. Dann gilt insbesondere für alle x aus K und h aus H:

$$x = z_h \, x \, z_h^{-1}.$$

Damit ist z_h für alle h aus H aus dem Zentrum von K, welches trivial ist. Es folgt, daß σ_y die identische Abbildung von K^H ist. ./.

Zur Abgrenzung von Satz 7.7 kann man - abgesehen von dem etwas trivialen Beispiel $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ ($\mathbb{Z}$ versehen mit der p-adischen Topologie bezüglich einer Primzahl p) - eines der separierten nicht-minimalen topologischen semi-direkten Produkte $G_1 \underset{\sigma_1}{\times} H_1$ nach der Tabelle am Ende des letzten Paragraphen heranziehen. Dabei ist dann $\tilde{G}_1 \underset{\sigma_1}{\times} H_1$ kompakt, G_1 q-minimal und zentrumslos, H_1 abelsch, σ_1 injektiv und

$$\mathrm{Inn}(G_1) \cap \sigma_1(H_1) = \{\mathrm{id}_{G_1}\}$$

aber (nun notwendig):

$$\mathrm{Inn}(\tilde{G}_1) \cap \bar{\sigma}_1(H_1) \neq \{\mathrm{id}_{G_1}\}.$$

Parallel zu 7.8 (a) gewinnen wir noch die Aussage: Ein topologisches semi-direktes Produkt $G \underset{\sigma}{\times} H$ zweier minimaler (bzw. q-minimaler) Gruppen G und H ist minimal (bzw. q-minimal), wenn H abelsch und $\mathrm{Fix}(\overline{\sigma}(H)) = \{e\}$ ist (und wenn im q-minimalen Fall G topologisch einfach ist). Wir zeigen nämlich:

7.10 Satz. Sei $G \underset{\sigma}{\times} H$ ein topologisches semi-direktes Produkt einer minimalen (bzw. q-minimalen und topologisch einfachen) Gruppe G und einer separierten Gruppe H. Das topologische semi-direkte Produkt $\tilde{G} \underset{\overline{\sigma}}{\times} H$ sei minimal (bzw. q-minimal). Dann gilt:
Ist eine der folgenden Bedingungen (a), (b) oder (c):
(a) $\mathrm{Fix}(\overline{\sigma}(Z(H))) = \{e\}$,
(b) $\mathrm{Fix}(\overline{\sigma}(H)) = \{e\}$ und H ist abelsch,
(c) $\mathrm{Fix}(\overline{\sigma}(H)) = \{e\}$, σ ist injektiv und $\overline{\sigma}(H)$ ist Teilmenge von $Z_{\mathrm{Aut}(G)}(\mathrm{Inn}(G))$,
erfüllt, so ist $G \underset{\sigma}{\times} H$ minimal (bzw. q-minimal).

Beweis. Für (a) bzw. (c) weist man wieder nach, daß $\tilde{G} \underset{\overline{\sigma}}{\times} H$ die Eigenschaft (NE) bzw. (NE') hat, während (b) eine Konsequenz aus (a) ist. Sei also N ein abgeschlossener Normalteiler von $\tilde{G} \underset{\overline{\sigma}}{\times} H$ mit $N \cap (\tilde{G} \times \{e\}) = \{e\}$.
(a) Nach 7.6 (b) ist $\mathrm{pr}_G(N)$ Teilmenge von $\mathrm{Fix}\,\overline{\sigma}(Z(H))$, so daß N die Gestalt $N = \{e\} \times M$ mit $M \subset H$ hat.
(c) Unter diesen Bedingungen ergibt sich aus 7.6 (c), daß N die Gestalt $N = \{e\} \times M$ mit $M \subset H$ hat, und nun sogar, da σ injektiv ist, daß N trivial ist. ./.

Neben obiger Aussage ergibt sich aus 7.10 (b) auch:

7.11 Folgerung. Ein topologisches semi-direktes Produkt zweier minimaler (bzw. q-minimaler) abelscher Gruppen G und H ist minimal (bzw. q-minimal), wenn G kein Element der Ordnung 2 besitzt (und im q-minimalen Fall topologisch einfach ist) und wenn die Abbildung $x \longmapsto x^{-1}$ auf G zu $\sigma(H)$ gehört.

Beweis. Mit G besitzt auch $\tilde{G}$ kein Element der Ordnung 2, da für jedes x aus $\tilde{G}$ mit $x \neq e$ der Durchschnitt $\langle x \rangle \cap G$ nicht-trivial ist. Daraus folgt $\mathrm{Fix}(\bar{\sigma}(H)) = \{e\}$. ./.

Zum Schluß sei bemerkt, daß sich die Minimalität von $C_n^{(I)} \times (\mathrm{Aut}(C_n))^I$ (I unendlich, n ungerade mit $n \geq 3$, vgl. 5.12) nicht aus 7.11 ableiten läßt, da $C_n^{(I)}$ nicht minimal ist.

§ 8 Abzählbare direkte Produkte q-minimaler Gruppen

Notwendige Voraussetzung für die q-Minimalität eines abzählbaren direkten Produkts $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ q-minimaler Gruppen ist zunächst:

(*) alle endlichen direkten Produkte der G_n sind q-minimal.

Wir werden noch eine weitere Eigenschaft verlangen, die wir (PE) nennen wollen (s. 8.2), und können dann die q-Minimalität von X feststellen. Und zwar durch Übertragung des von V. Eberhardt in [11] gegebenen Beweises für die Vererbbarkeit der q-Minimalität (strikten Minimalität) bei topologischen Vektorräumen auf abzählbare direkte Produkte.

Von der Eigenschaft (PE) steht fest, daß sie nicht aus (*) folgt, jedoch bleibt offen, ob (*) nicht trotzdem schon allein die q-Minimalität von X zur Folge hat. Immerhin weisen wir nach, daß bei einem abzählbaren direkten Produkt $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ minimaler Gruppen die Minimalität von X nicht daraus folgt, daß alle endlichen direkten Produkte der G_n minimal sind.

Unabhängig von diesen Überlegungen betrachten wir zum Schluß noch eine Eigenschaft nicht-minimaler beliebiger direkter Produkte minimaler Gruppen.

Sei $(G_\iota)_{\iota\in I}$ eine nicht-leere Familie von Gruppen. Sei $\mathfrak{T}$ eine Gruppentopologie auf dem direkten Produkt $\prod_{\iota\in I} G_\iota$ und sei J eine nicht-leere Teilmenge von I. Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{pr}_J(\mathfrak{T})$ die Gruppenfinaltopologie bezüglich der kanonischen Projektion

$$\mathrm{pr}_J : \left(\prod_{\iota\in I} G_\iota, \mathfrak{T}\right) \longrightarrow \prod_{\iota\in J} G_\iota$$

(für $\mathrm{pr}_{\{\iota\}}$ schreiben wir wie üblich pr_ι).

Es gilt stets

$$\mathfrak{T} \supset \prod_{\iota\in I} \mathrm{pr}_\iota(\mathfrak{T}).$$

Sei jetzt $(G_\iota)_{\iota\in I}$ eine nicht-leere Familie minimaler Gruppen und sei $(X,\mathcal{T})$ ihr direktes Produkt. Dieses ist minimal, wenn für jede separierte Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}$ und für jede nicht-leere endliche Teilmenge E von I die Beziehung

$$pr_E(\{e\}) = \overline{\{pr_E(e)\}}^{\,pr_E(\mathcal{T})}$$

gilt (da dann für jedes ι aus I die Gruppenfinaltopologie $pr_\iota(\mathcal{T})$ separiert, also gleich der gegebenen minimalen Gruppentopologie auf G_ι ist). Ein entsprechendes hinreichendes Kriterium für die q-Minimalität eines direkten Produkts q-minimaler Gruppen lautet:

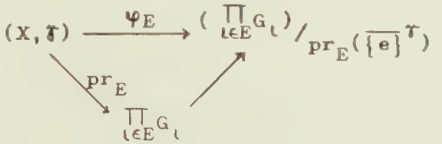
8.1 Lemma (vgl. [10], p.6/7). Sei $(G_\iota)_{\iota\in I}$ eine nicht-leere Familie q-minimaler Gruppen und sei $(X,\mathcal{T})$ ihr direktes Produkt. Es gelte für jede nicht-leere endliche Teilmenge E von I:

(a) das direkte Produkt $\prod_{\iota\in E}G_\iota$ ist q-minimal und

(b) für jede Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}$ gilt

$$pr_E(\overline{\{e\}}^{\mathcal{T}}) = \overline{\{pr_E(e)\}}^{\,pr_E(\mathcal{T})},$$

d.h. die Gruppenfinaltopologien bezüglich der kanonischen Abbildungen φ_E im Diagramm



sind separiert.

Dann ist $(X,\mathcal{T})$ q-minimal.

Beweis. Wir beziehen uns auf Lemma 1.3. Sei $\mathcal{T}$ eine Gruppentopologie auf X mit $\mathcal{T}\subset\mathcal{T}$. Sei U aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T})$, o.E.

$$U = V \times \prod_{\iota\in I\setminus E} G_\iota$$

mit $E\subset I$ endlich und nicht-leer und V aus $\mathcal{U}_e(\mathcal{T}_E)$, wobei wir hier mit $\mathcal{T}_E$ die gegebene q-minimale Produkttopologie auf $\prod_{\iota\in E}G_\iota$ bezeichnen.

Wir setzen $N := \overline{\mathrm{pr}_E(\{e\})}^{\mathrm{pr}_E(\tau)}$. Da $\mathrm{pr}_E(\tau)$ die Initialtopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$\prod_{\iota\in E} G_\iota \longrightarrow \left(\prod_{\iota\in E} G_\iota /_N,\ \tau_E /_N\right)$$

ist, ergibt sich, daß

$$\begin{aligned} U\overline{\{e\}}^{\tau} &= (V\mathrm{pr}_E(\overline{\{e\}}^{\tau})) \times \prod_{\iota\in I\setminus E} G_\iota \\ &= VN \times \prod_{\iota\in I\setminus E} G_\iota \\ &= \mathrm{pr}_E^{-1}(VN) \end{aligned}$$

aus $\mathfrak{U}_e(\tau)$ ist. Es folgt: τ ist die Initialtopologie bezüglich der kanonischen Abbildung

$$X \longrightarrow (X/\overline{\{e\}}^{\tau},\ \tau/\overline{\{e\}}^{\tau}). \quad ./.$$

Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge q-minimaler Gruppen, sei k aus $\mathbb{N}$ und sei E die endliche Teilmenge $\{1,..,k\}$ von $\mathbb{N}$. Dann schreiben wir X_k für $\prod_{n=1}^{k} G_n$, (jetzt) $\mathcal{P}_k$ für die Produkttopologie auf X_k und p_k für pr_E. Die kanonische Projektion von X_{k+1} auf X_k werde mit π_k bezeichnet. Ist τ eine beliebige Gruppentopologie auf $X := \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$, so sei τ_k die Gruppenfinaltopologie bzgl. $p_k : (X,\tau) \longrightarrow X_k$.

8.2 Satz (nach [11], p.55, Satz 4.4 (i) und [10], p.6/7). Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge q-minimaler Gruppen und sei (X,τ) ihr direktes Produkt. Für jedes k aus $\mathbb{N}$ seien die endlichen direkten Produkte $(X_k,\mathcal{P}_k)$ q-minimal und es gelte:

(PE) { für jeden abgeschlossenen Normalteiler N von $(X_{k+1},\mathcal{P}_{k+1})$ ist $\pi_k(N)$ abgeschlossen in $(X_k,\mathcal{P}_k)$.

Dann ist (X,τ) q-minimal.

Beweis. Wir folgen den Beweisen in loc. cit.. Sei τ eine Gruppentopologie auf X mit $\tau\subset\tau$ und sei k aus $\mathbb{N}$. Da π_k bezüglich τ_{k+1} und τ_k stetig ist, gilt

$$\pi_k^{-1}(\overline{\{e\}}^{\tau_k}) \supset \overline{\pi_k^{-1}(\{e\})}^{\tau_{k+1}}, \text{ also}$$

$$\overline{\{e\}}^{\tau_k} = \pi_k(\overline{\mathrm{Kern}\ \pi_k}^{\tau_{k+1}}).$$

Da $\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}}$ ein abgeschlossener Normalteiler von $(X_{k+1}, \mathcal{P}_{k+1})$ ist, liefert (PE), daß

$$(\text{Kern } \pi_k).\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}} = \left(\left(\prod_{i=1}^{k}\{e\}\right) \times G_{k+1}\right).\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}}$$

abgeschlossen bezüglich $\mathcal{P}_{k+1}$ ist. Also ist

$$\left((\text{Kern } \pi_k).\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}}\right).\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}} = (\text{Kern } \pi_k).\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}}$$

abgeschlossen bezüglich τ_{k+1}, welches die Initialtopologie bezüglich der kanonischen Abbildung von X_{k+1} auf

$$\left(X_{k+1}/\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}},\ \mathcal{P}_{k+1}/\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}}\right)$$

ist (vgl. 1.3 (e)). Damit ergibt sich

$$\overline{\text{Kern } \pi_k}^{\tau_{k+1}} \subset (\text{Kern } \pi_k).\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}},$$

woraus

$$\overline{\{e\}}^{\tau_k} = \pi_k(\overline{\{e\}}^{\tau_{k+1}})$$

folgt. Bei festem k aus $\mathbb{N}$ und x aus $\overline{\{e\}}^{\tau_k}$ läßt sich nun durch Induktion die i-te Komponente y_i eines Elements y aus $p_k^{-1}(\{x\})$ so bestimmen, daß $p_i(y)$ aus $\overline{\{e\}}^{\tau_i}$ ist. Dieses y gehört zu

$$\bigsqcap_{i\in\mathbb{N}} p_i^{-1}(\overline{\{e\}}^{\tau_i}) = \bigsqcap_{i\in\mathbb{N}} p_i^{-1}\left(\bigsqcap_{V\in\mathcal{U}_e(\tau)} p_i(V)\right)$$

$$= \bigsqcap_{V\in\mathcal{U}_e(\tau)} \bigsqcap_{i\in\mathbb{N}} p_i^{-1}p_i(V)$$

$$= \bigsqcap_{V\in\mathcal{U}_e(\tau)} \bigsqcap_{i\in\mathbb{N}} V.\left(\prod_{1}^{i}\{e\} \times \prod_{n=i+1}^{\infty} G_n\right),$$

einer Menge, die wegen $\tau\subset\mathcal{T}$ in $\bigsqcap_{V\in\mathcal{U}_e(\tau)} V.V = \overline{\{e\}}^{\tau}$ enthalten ist. Also ist $x = p_k(y)$ aus $p_k(\overline{\{e\}}^{\tau})$. Es folgt $\overline{\{e\}}^{\tau_k} \subset p_k(\overline{\{e\}}^{\tau})$.

Da die umgekehrte Inklusion trivial ist, hat man damit 8.1 (b) für die speziellen Mengen $E = \{1,..,k\}$ $(k\in\mathbb{N})$ nachgewiesen. Für beliebige endliche Mengen $E\subset\mathbb{N}$ kann man offenbar analog schließen. ./.

Mit Hilfe von 7.8 (c), 6.14 und 6.15 erhält man unmittelbar aus 8.2:

8.3 Folgerung. Abzählbare direkte und schwach direkte Produkte q-minimaler topologisch einfacher zentrumsloser Gruppen sind q-minimal.

8.4 Bemerkung (vgl. [6]). Durch Folgerung 8.3 erweisen sich auch folgende nicht-endliche, nicht-dichte und nicht-offene Untergruppen der symmetrischen Gruppe S(T) über einer unendlichen Menge T als q-minimal (wobei S(T) versehen ist mit der Topologie der punktweisen Konvergenz bezüglich der diskreten Uniformität auf T):
Sei $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Zerlegung von T, bei der jedes T_n unendlich ist. Für jedes n aus $\mathbb{N}$ sei G_n eine dichte Untergruppe von $S(T_n)$. Dann sind $\prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ und $\prod^{*}_{n\in\mathbb{N}} G_n$ (auffaßbar als) q-minimale Untergruppen von S(T).

In der Situation von 8.2 ohne Bedingung (PE) ist $\pi_k(N)$ für einen abgeschlossenen Normalteiler N von $(X_{k+1},\mathcal{T}_{k+1})$ auch bei verhältnismäßig starken Nebenbedingungen nicht abgeschlossen in $(X_k,\mathcal{T}_k)$: Man setze $G_n := \{e\}$ für n aus $\mathbb{N}$ mit $n \geq 3$, wähle für G_2 eine q-minimale nicht vollständige abelsche Torsionsgruppe und nehme für G_1 die kompakte Vervollständigung von G_2. Es ist dann $X_2 = G_1 \times G_2$ q-minimal und

$$N := \{(x,x) \mid x \in G_2\}$$

ein q-minimaler abgeschlossener Normalteiler von X_2, für den $\pi_1(N)$ nicht abgeschlossen in $X_1 = G_1$ ist. Es gilt nun:

8.5 Lemma. Sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge q-minimaler Gruppen und sei $(X,\mathcal{T})$ ihr direktes Produkt. Für jedes k aus $\mathbb{N}$ seien die endlichen direkten Produkte $(X_k,\mathcal{T}_k)$ q-minimal und es gelte:

(**) { ein Normalteiler von $(X_k,\mathcal{T}_k)$ ist genau dann abgeschlossen, wenn er q-minimal ist.

Dann ist $(X,\mathcal{T})$ q-minimal.

Beweis. Man stellt die Eigenschaft (PE) fest: Sei k aus $\mathbb{N}$ und sei N ein abgeschlossener Normalteiler von $(X_{k+1},\mathcal{P}_{k+1})$. Nach (**) ist N q-minimal, also auch $\pi_k(N)$. Nochmalige Anwendung von (**) liefert die $\mathcal{P}_k$-Abgeschlossenheit von $\pi_k(N)$. ./.

Damit läßt sich eine Frage von R.M. Stephenson, Jr., beantworten. ([26], p.254):

8.6 Folgerung (gemeinsam mit V. Eberhardt). Abzählbare direkte Produkte q-minimaler abelscher Torsionsgruppen sind q-minimal. Insbesondere ist $(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\mathbb{N}}$ q-minimal.

Beweis. Es sei $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge q-minimaler abelscher Torsionsgruppen und es sei k aus $\mathbb{N}$. Nach 6.9 (e) ist $(X_k,\mathcal{P}_k)$ q-minimal. Da abgeschlossene Untergruppen q-minimaler abelscher Gruppen q-minimal sind, hat man für den Nachweis von 8.5 (**) nur noch zu zeigen, daß jede q-minimale Untergruppe von X_k abgeschlossen bezüglich $\mathcal{P}_k$ ist. Dies überlegt man sich aber wie in 6.10. ./.

Zur Abgrenzung von 8.6 zeigen wir, daß abzählbare direkte Produkte minimaler abelscher Torsionsgruppen, deren endliche direkte Produkte ja stets minimal sind, nicht minimal zu sein brauchen. Im weiteren Sinne ist dies auch eine Abgrenzung von 8.2.

8.7 Für die auf Seite 10 beschriebene Gruppe G ("Sulley-Gruppe") gilt: $G^{\mathbb{N}}$ ist nicht minimal.

Beweis. Es bezeichne T den Einheitskreis. Für k aus $\mathbb{N}$ sei

$$x_k := e^{2\pi i 2^{-k}}.$$

Wir behaupten, daß die abgeschlossene Untergruppe

$$N := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left(\langle (x_k)_{k=1,..,n}\rangle \times \prod_{n+1}^{\infty} T\right)$$

von $T^{\mathbb{N}}$ trivialen Durchschnitt mit $G^{\mathbb{N}}$ hat. Zum Beweis sei $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus N mit $y \neq (1)_{k\in\mathbb{N}}$. Sei k aus $\mathbb{N}$ so, daß $y_k \neq 1$ ist. Es gibt ein r aus $\mathbb{Z}$ so, daß

$$(y_1,..,y_{k+1}) = (x_1,..,x_{k+1})^r$$

gilt. Angenommen, y_{k+1} ist aus G. Dann gibt es ein r' aus $\mathbb{Z}$ so, daß $r2^{-(k+1)}-r'2^{-1}$ aus $\mathbb{Z}$ ist. Entweder ist nun r' aus $2\mathbb{Z}$, also r aus $2^{k+1}\mathbb{Z}$ oder es ist r' aus $2\mathbb{Z}+1$, also r aus $2^k\mathbb{Z}$. In beiden Fällen folgt $y_k = x_k^{\,r} = 1$. Widerspruch. ./.

Wir betrachten noch die erwähnte Eigenschaft nicht-minimaler direkter Produkte. Für jedes nicht-minimale direkte Produkt $(X,\mathcal{T})$ von minimalen Gruppen und für jede separierte Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{T}$ gilt offenbar:

$$\mathcal{T} \supsetneq \prod_{\iota\in I} \mathrm{pr}_\iota(\mathcal{T}).$$

Es gilt nun schärfer:

8.9 Behauptung (vgl. [8], Beweis zu Th. 1). Es sei $(G_\iota,\mathcal{T}_\iota)_{\iota\in I}$ eine Familie minimaler Gruppen mit card $I \geq 2$. Das direkte Produkt

$$(X,\mathcal{T}) := \left(\prod_{\iota\in I} G_\iota, \prod_{\iota\in I}\mathcal{T}_\iota\right)$$

sei nicht minimal. Dann gibt es zu jeder separierten Gruppentopologie $\mathcal{T}$ auf X mit $\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{T}$ zwei Indizes κ und λ aus I derart, daß gilt: für $\mu = \kappa,\lambda$ ist die Gruppenfinaltopologie $\mathrm{pr}_\mu(\mathcal{T})$ nicht separiert und

$$\text{Kern } \mathrm{pr}_\mu = \{e_\mu\} \times \prod_{\iota\in I\setminus\{\mu\}} G_\iota$$

nicht $\mathcal{T}$-abgeschlossen.

Beweis. Sei $\mathcal{T}$ eine separierte Gruppentopologie auf X mit $\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{T}$. Für ι aus I setzen wir

$$\mathcal{T}_\iota := \mathrm{pr}_\iota(\mathcal{T}) \quad \text{und}$$
$$Z_\iota := \text{Kern } \mathrm{pr}_\iota .$$

Da die Projektionen

$$pr_\iota : (X,\tau) \longrightarrow (G_\iota, \tau_\iota)$$

offene surjektive Homomorphismen sind, gilt nach [4], Ch. III, § 2.8, Proposition 24, für alle ι aus I:

$$(X,\tau)/_{\text{Kern } pr_\iota} \cong (G_\iota, \tau_\iota),$$

weshalb τ_ι genau dann separiert ist, wenn Z_ι τ-abgeschlossen ist.

Zunächst gibt es ein κ aus I so, daß τ_κ nicht separiert ist. Sei x_κ aus $\overline{\{e_\kappa\}}^{\tau_\kappa} \setminus \{e_\kappa\}$. Für jedes U aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ gilt somit

$$(***) \qquad U \cap (\{x_\kappa\} \times \prod_{\iota \in I\setminus\{\kappa\}} G_\iota) \neq \emptyset.$$

Also ist Kern pr_κ nicht τ-abgeschlossen.

Angenommen, für jedes ι aus $I\setminus\{\kappa\}$ ist τ_ι separiert, also $\tau_\iota = \mathfrak{T}_\iota$. Dann folgt, daß für alle W aus $\mathcal{U}_e(\prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} G_\iota, \prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} \mathfrak{T}_\iota)$ die Menge $G_\kappa \times W$ zu $\mathcal{U}_e(\tau)$ gehört. Für ι aus $I\setminus\{\kappa\}$ sei $x_\iota := e_\iota$ und es sei $x := (x_\iota)_{\iota\in I}$. Da $\mathfrak{T}$ separiert ist, existiert ein U aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ so, daß gilt:

$$U \cap x.U = \emptyset$$

Es gibt ein V aus $\mathcal{U}_e(\tau)$ so, daß gilt: $V \subset U$, $V = V_\kappa \times W$ mit V_κ aus $\mathcal{U}_e(\tau_\kappa)$ und W aus $\mathcal{U}_e(\prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} \mathfrak{T}_\iota)$. Nun ergibt sich aus (***):

$$\emptyset \neq (U \cap (G_\kappa \times W)) \cap (\{x_\kappa\} \times \prod_{\iota\in I\setminus\{\kappa\}} G_\iota)$$

$$= U \cap (\{x_\kappa\} \times W) \subset U \cap x.U = \emptyset. \quad \text{Widerspruch.}$$

./.

Liste der Symbole

$\|A\|$	Länge des Intervalls A
$\mathrm{Aut}(X)$	Automorphismengruppe von X
$\mathcal{B}$	Filterbasis
Γ_n	$\mathrm{Aut}(C_n)$
$\vartheta, \vartheta_X, \ldots$	diskrete Topologien
C_n	$\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$
$D(X)$	Kommutatorgruppe von X
$\delta_{\iota\kappa}$	Kronecker-Symbol
$e, 0, e_G, e_\iota, \ldots$	neutrale Elemente
η	Einbettung
$\mathrm{Fix}(\Gamma)$	Menge der Fixpunkte von Γ 52
$G^{(I)}$	das schwach direkte Produkt $\prod^*_{\iota\in I} G$
$G \underset{\sigma}{\times} H$	(topologisches) semi-direktes Produkt
$\tilde{G} \underset{\bar{\sigma}}{\times} H$	mit $G \underset{\sigma}{\times} H$ assoziiertes topologisches semi-direktes Produkt 75
$\mathrm{Inn}(X)$	Gruppe der inneren Automorphismen von X
(i_X, X_c)	Bohr-Kompaktifizierung von X 6
$\langle M \rangle$	von M erzeugte Untergruppe
$\mathbf{N}$	Menge der positiven ganzen Zahlen
$\prod^*_{\iota\in I} G_\iota$	schwach direktes Produkt ($\prod^*_{\iota\in I} G_\iota = \left\{ (x_\iota)_\iota \in \prod_{\iota\in I} G_\iota \;\middle|\; \begin{array}{l}\text{es gibt nur endlich viele}\\ \iota\in I \text{ mit } x_\iota \neq e_\iota\end{array} \right\}$)
p_k	kanonische Projektion von $\prod_{n\in\mathbf{N}} G_n$ auf $\prod_{n=1}^{k} G_n$
$\mathfrak{p}_k$	Produkttopologie auf $\prod_{n=1}^{k} G_n$
π_k	kanonische Projektion von $\prod_{n=1}^{k+1} G_n$ auf $\prod_{n=1}^{k} G_n$
$pr_G, pr_\iota, pr_J, \ldots$	kanonische Projektionen
$pr_J(\mathfrak{T})$	Gruppenfinaltopologie bezüglich pr_J
$q, q_N, \ldots$	Quotienten-Abbildungen
$\mathbf{R}^*_+$	multiplikative Gruppe der positiven reellen Zahlen
ρ	Homomorphismus von X in Inn(X) mit $\rho(y)(x) = yxy^{-1}$
σ	Homomorphismus von H in Aut(G)
$\bar{\sigma}$	mit σ assoziierter Homomorphismus von H in $\mathrm{Aut}(\tilde{G})$ 75

$\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}$,..	Topologien (bis auf $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{U}$ bezeichnen die großen Buchstaben des deutschen Alphabets nur Topologien)
$\mathfrak{T} \wedge \mathfrak{T}$	feinste Gruppentopologie, die gröber als $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}$ ist (Infimum)
$\mathfrak{T} \subset \mathfrak{T}$	$\mathfrak{T}$ ist gröber als $\mathfrak{T}$
$\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2$	Produkttopologie
$\mathfrak{T}\|G$	Relativtopologie auf G
$\mathfrak{T}/_N$	Quotiententopologie
$\mathfrak{U}_e(\mathfrak{T}), \mathfrak{U}_e(X)$,..	Umgebungsfilter von e in $(X,\mathfrak{T})$
$\tilde{X}$	beidseitige Vervollständigung von X
$\underline{x}$	$(x)_{\iota \in I}$
ZK(x,M)	Zusammenhangskomponente von x in M
Z(X)	Zentrum von X
$\cong$	topologisch isomorph
./.	Ende eines Beweises

Stichwortverzeichnis

Banaschewski-Kriterium 13
beidseitige Vervollständigung 14
beidseitig vollständig 66
B_r-vollständig 9
B-vollständig 9
Eigenschaft (D) 31
Eigenschaften (NE), (NE') 76
Eigenschaft (PE) 86
erblich beidseitig vollständig 66
fast-offen 9
minimal 5
minimal trennend 8, 25
q-minimal 5
q-wesentlich 10
topologisch einfach 51
verträgliche Gruppentopologien 41
wesentlich 10

Offene Fragen

(1) Eine separierte Gruppe X heiße epi-minimal, wenn alle epimorphen Bilder von X minimal sind. Da die surjektiven stetigen Homomorphismen Epimorphismen in der Kategorie der separierten topologischen Gruppen sind, folgt, daß jede epi-minimale Gruppe q-minimal ist. Gilt hiervon auch die Umkehrung? (Diese Frage wird gegenstandslos, falls sich herausstellen sollte, daß die Epimorphismen in der Kategorie der separierten topologischen Gruppen gerade die stetigen Homomorphismen mit dichtem Bild sind; vgl. Temple H. Fay, A note on Hausdorff groups, Bull. Austral. Math. Soc., 13 (1975), 117-119.)

(2) Gibt es nicht-präkompakte minimale abelsche Gruppen?

(3) Gibt es lokalkompakte nicht-kompakte q-minimale Gruppen?

(4) Gibt es unendliche diskrete minimale oder gar q-minimale Gruppen?

(5) Gibt es minimale oder gar q-minimale Gruppen, die einen offenen nicht-minimalen Normalteiler besitzen?

(6) Gibt es auf $\mathbb{R}^*$ eine minimale Gruppentopologie, die gröber als die Standardtopologie ist?

(7) Sei $(X,\mathcal{T})$ eine separierte Gruppe. Besitzt die Eigenschaft: "auf X gibt es eine (bzw. keine) minimale Gruppentopologie, die gröber als $\mathcal{T}$ ist" irgendwelche Permanenzeigenschaften (vgl. 3.6)?

(8) Gibt es nicht-kompakte minimale topologisch einfache (also q-minimale) abelsche Gruppen (vgl. Seite 81)?

(9) Sei $X = \prod_{n\in\mathbb{N}} G_n$ das direkte Produkt der q-minimalen Gruppen G_n. Ist X q-minimal, wenn alle endlichen direkten Produkte der G_n q-minimal sind?

Literaturverzeichnis

[1] ALFSEN, E.M. and HOLM, P., A note on compact representations and almost periodicity in topological groups, Math. Scand. 10 (1962), 127-136

[2] BANASCHEWSKI, B., Minimal topological algebras, Math. Ann. 211 (1974), 107-114

[3] BERRI, M.P., PORTER, J.R. and STEPHENSON, R.M., Jr., A survey of minimal topological spaces, General topology and its relations to modern analysis and algebra III, Proc. Conf. Kanpur (1968), Academia, Prague (1971), 93-114

[4] BOURBAKI, N., Elements of mathematics, General topology, part 1, Hermann, Paris (1966)

[5] BOURBAKI, N., Elements of mathematics, General topology, part 2, Hermann, Paris (1966)

[6] DIEROLF, S., SCHWANENGEL, U., Un exemple d'un groupe topologique q-minimal mais non précompact, Bull. Sc. math., 2^e série, 101 (1977), 265-269

[7] DIKRANJAN, D., PRODANOV, I., A class of compact Abelian groups, submitted to Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. de Math. 70 (1975/76)

[8] DOITCHINOV, D., Produits de groupes topologiques minimaux, Bull. Sc. math., 2^e Série, 96 (1972), 59-64

[9] DOITCHINOV, D., Minimal topological groups, Coll. Math. Soc. J.Bolyai, 8. Topics in Topology, Keszthely (1972), 213-214

[10] EBERHARDT, V., Einige Vererbbarkeitseigenschaften von B- und B_r-vollständigen Räumen, Math. Ann. 215 (1975), 1-11

[11] EBERHARDT, V., Über Komura's Graphensatz: Vollständigkeit, Permanenzeigenschaften und Beispiele, Habilitationsschrift (1977)

[12] HALMOS, P.R., Comment on the real line, Bull. Amer. Math. Soc. 50 (1944), 877-878

[13] HAWLEY, D., Compact group topologies for R, Proc. Amer. Math. Soc. 30 (1971), 566-572

[14] HERRLICH, H., T_ν-Abgeschlossenheit und T_ν-Minimalität, Math. Zeitschr. 88 (1965), 285-294

[15] HEWITT, E. and ROSS, K.A., Abstract harmonic Analysis I, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1963)

[16] HOLM, P., On the Bohr compactification, Math. Ann. 156 (1964), 34-46

[17] HOOPER, R.C., Locally compact subgroups of metrizable topological Abelian groups, Proc. Amer. Math. Soc. 57 (1976), 159-164

[18] HUSAIN, T., Introduction to topological groups, W.B. Saunders Company, Philadelphia and London (1966)

[19] PRODANOV, I., Precompact minimal group topologies and p-adic numbers, Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. de Math. 66 (1971/72), 249-266

[20] PRODANOV, I., Precompact minimal topologies in Abelian groups, C.R. Acad. Bulg. de Sc. 26 (1973) 1287-1288

[21] PRODANOV, I., Some minimal group topologies are precompact, Math. Ann. 227 (1977), 117-125

[22] PRODANOV, I., Minimal topologies on countable Abelian groups, submitted to Ann. de l'Univ. de Sofia, Fac. de Math., 70 (1975/76)

[23] ROELCKE, W., Topologische Gruppen I und II, Vorlesung Universität München (1974/75)(unveröffentlicht)

[24] SHARPE, K.J., Two properties of R^N with a compact group topology, Proc. Amer. Math. Soc. 34 (1972), 267-269

[25] STEPHENSON, R.M., Jr., Minimal topological groups, Math. Ann. 192 (1971), 193-195

[26] STEPHENSON, R.M., Jr., Some unsolved problems concerning P-minimal and P-closed spaces, Topology, 24, Proc. Memphis State Univ. (1977), 249-257

[27] SULLEY, L.J., A note on B- and B_r-complete topological Abelian groups, Proc. Camb. Phil. Soc. 66 (1969), 275-279

Lebenslauf:

Geburtsdatum:	22.12.1946
Geburtsort:	Heidenheim/Brenz
Schulbildung:	1953 - 1957 Grundschule in Heidenheim/Brenz
	1957 - 1966 Hellenstein-Gymnasium in Heidenheim/Brenz
Bundeswehr:	1966 - 1968
Studium:	1968 - 1975 Universität München
	Diplom-Vorprüfung: 29.10.1970
	Diplom-Hauptprüfung: 21.3.1975
	1975 - 1978 Dissertation
Beruf:	seit 1.8.1978 Mitarbeiter der Softlab GmbH, München